Université Claude Bernard - Lyon 1 Printemps 2012

Math II - PMI/CCP Durée : 1 heure et 30 minutes

Problème - Devoir numéro 2

Les calculatrices sont autorisées, mais totalement inutiles

Pour tout $n \geq 0$, on note m_n, c_n et p_n les fonctions respectivement définies sur $[-1,1]$, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}$ comme suit :

$$m_n(t) = t^n,\ t \in [-1,1],$$

$$c_n(\varphi) = \cos(n\varphi),\ \varphi \in \mathbf{R},$$

$$p_n(\varphi) = \cos^n(\varphi),\ \varphi \in \mathbf{R}.$$

Première partie

1) Montrer que (m_0, m_1, m_2) est libre.

2) a) Soit $n \geq 1$ et soit $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que :

$$\lambda_0 m_0 + \lambda_1 m_1 + \cdots + \lambda_n m_n = 0.$$

Montrer que $\lambda_1 m_0 + 2\lambda_2 m_1 + \cdots + n\lambda_n m_{n-1} = 0$.

b) Montrer par récurrence sur $n \geq 0$ que $(m_0, \ldots, m_n)$ est libre.

3) Montrer que pour tout $n \geq 0$ la fonction e définie pour tout $t \in [-1,1]$ par $e(t) = e^t$ n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(m_0, \ldots, m_n)$.

4) Déduire de la question 2 que $(p_0, \ldots, p_n)$ est libre.

Deuxième partie

5) Pour θ réel, écrire $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos^3\theta$ et $\cos\theta$, puis $\cos^3\theta$ en fonction de $\cos(3\theta)$ et $\cos\theta$.

6) a) Montrer que pour tous α et β réels :

$$\cos\alpha\, \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right].$$

b) En déduire que pour tous i, j entiers naturels :

$$c_i c_j = \frac{1}{2}(c_{i+j} + c_{|i-j|}).$$

7) a) Montrer par récurrence sur $n \geq 0$ que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N}, \qquad p_n \in \mathrm{Vect}(c_0, \ldots, c_n).$$

b) Soit $n \geq 0$. En utilisant la famille $(p_0, \ldots, p_n)$, montrer que $\mathrm{Vect}(c_0, \ldots, c_n)$ est de dimension supérieure ou égale à $n+1$.

En déduire que $(c_0, \ldots, c_n)$ est libre et que $\mathrm{Vect}(c_0, \ldots, c_n) = \mathrm{Vect}(p_0, \ldots, p_n)$.

Troisième partie

8) a) Calculer $\displaystyle\int_0^\pi c_0(t)\,dt$ puis $\displaystyle\int_0^\pi c_i(t)\,dt$ pour $i \neq 0$.

b) Pour $i \neq j$, calculer :

$$\int_0^\pi c_i(t) c_j(t)\,dt.$$

c) Calculer enfin $\displaystyle\int_0^\pi c_0^2(t)\,dt$ puis $\displaystyle\int_0^\pi c_i^2(t)\,dt$ pour $i \neq 0$.

9) Soit $n \geq 0$, soit $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tels que :

$$\lambda_0 c_0 + \cdots + \lambda_n c_n = 0$$

et soit i un entier compris entre 0 et n
En calculant de deux façons différentes l'intégrale :

$$\int_0^\pi (\lambda_0 c_0(t) + \cdots + \lambda_n c_n(t))\, c_i(t)\, dt$$

montrer que $\lambda_i = 0$
et en tirer une nouvelle preuve de la liberté de la famille $(c_0, \dots, c_n)$.

10) a) On note α_n la dernière coordonnée dans la base $(c_0, \dots, c_n)$ de la fonction p_n (considérée comme vecteur de l'espace $\mathrm{Vect}(c_0, \dots, c_n)$, ce qu'elle est au vu de la question 7 a)).
En utilisant la représentation de $\cos\varphi$ au moyen de l'exponentielle complexe, écrire explicitement p_n comme combinaison linéaire de $(c_0, \dots, c_n)$ (il pourra être confortable de traiter séparément les cas où n est pair et où n est impair).
En déduire la valeur de α_n et remarquer que $\alpha_n \neq 0$.

b) En déduire une nouvelle preuve de la liberté de la famille $(p_0, \dots, p_n)$.

Quatrième partie

Soit f une fonction continue de $[0, \pi]$ vers $\mathbf{R}$.
On notera :

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t)\, dt \qquad \text{et} \qquad b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos t\, dt.$$

L'objectif de cette partie est de minorer sur $\mathbf{R}^2$ la fonction I définie par :

$$I(x, y) = \int_0^\pi (f(t) - x - y \cos t)^2\, dt.$$

11) Calculer a_1 et b_1 lorsque f est la fonction définie par $f(t) = t$.

12) On ne suppose plus que f est la fonction définie par $f(t) = t$: on suppose seulement, comme indiqué dans l'introduction de cette partie, que f est continue.
Dans cette question, on suppose qu'il existe un (a_0, b_0) dans $\mathbf{R}^2$ en lesquels la fonction I atteint un minimum.
On introduit les fonctions u et v de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ définies comme suit :

$$u(x) = \int_0^\pi (f(t) - x - b_0 \cos t)^2\, dt \qquad \text{et} \qquad v(y) = \int_0^\pi (f(t) - a_0 - y \cos t)^2\, dt$$

a) Montrer que la fonction u admet un minimum en a_0 et en déduire que $u'(a_0) = 0$. De même montrer que $v'(b_0) = 0$.

b) En déduire que $a_0 = a_1$ et que $b_0 = b_1$.

13) Soit h et k deux réels. Montrer la formule :

$$I(a_1 + h, b_1 + k) = I(a_1, b_1) + \int_0^\pi (h + k \cos t)^2\, dt.$$

En déduire que I admet un minimum au point (a_1, b_1) et en ce seul point.