1) Pour tout $k \geq 0$ et tout x réel, $u_k'(x) = (-1)^k x^{2k} = (-x^2)^k$.
Dès lors, pour tout $n \geq 0$ et tout x réel :

$$S_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k'(x) = \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k = \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2} = \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

2) Il résulte de la question précédente que $S_n'(x) - \frac{1}{1+x^2} = (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$ est du signe de $(-1)^n$. Dès lors :
* si $n = 2m$ est pair, cette différence est positive, d'où on déduit l'inégalité $\frac{1}{1+x^2} \leq S_{2m}'(x)$;
* si $n = 2m+1$ est impair, cette différence est négative, d'où on déduit l'inégalité $S_{2m+1}'(x) \leq \frac{1}{1+x^2}$.

3) Pour $n = 2m$ pair, on constate que partout sur $\mathbf{R}$, $g_{2m}'(x) = S_{2m}'(x) - \frac{1}{1+x^2}$ est positif. La fonction g_{2m} est donc croissante. On calcule sans aucune difficulté $g_{2m}(0) = 0$. La fonction g_{2m} est donc à valeurs positives sur $\mathbf{R}^+$: c'est l'énoncé qu'on nous demandait de prouver. Pour les n impairs, c'est la même chose *mutatis mutandis*.

4) a) Comme on a supposé $0 \leq x \leq 1$, on obtient $x^2 \leq 1$ puis $\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} \leq \frac{1}{2n+3} - \frac{x^2}{2n+5}$.
Le minorant $\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5}$ est clairement strictement positif par inversion de $0 < 2n+3 < 2n+5$.

b) On calcule :

$$\begin{aligned} S_{n+2}(x) - S_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) &= (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{2n+3} + (-1)^{n+2}\frac{x^{2n+5}}{2n+5} \\ &= (-1)^{n+1}x^{2n+3}\left[\frac{1}{2n+3} - \frac{x^2}{2n+5}\right]. \end{aligned}$$

c) Il résulte des deux sous-questions a) et b) que l'expression $S_{n+2}(x) - S_n(x)$ est de signe opposé à celui de n. En considérant un n pair, soit $n = 2m$ on peut écrire que pour tout $m \geq 0$, $S_{2m+2}(x) - S_{2m}(x) \leq 0$ et on montre ainsi que la suite $(S_{2m}(x))$ est une suite décroissante. De même en se penchant sur les $n = 2m+1$ impairs on constate que la suite $(S_{2m+1}(x))$ est une suite croissante.

Enfin pour tout $m \geq 0$, $S_{2m}(x) - S_{2m+1}(x) = \dfrac{x^{4m+3}}{4m+3}$ tend sans difficulté aucune vers 0 quand m tend vers l'infini.

d) Les hypothèses du critère des suites adjacentes sont donc remplies. On en déduit que les deux suites $(S_{2m}(x))$ et $(S_{2m+1}(x))$ sont convergentes, vers une même limite réelle l. On conclut alors que $(S_n(x))$ est elle-même convergente, vers l.

e) En faisant tendre m vers l'infini dans les deux inégalités du 3 et en conservant la notation l introduite une ligne plus haut, on obtient : $\operatorname{Arctan} x \leq l$ et $l \leq \operatorname{Arctan} x$. Donc $l = \operatorname{Arctan} x$.

5) a) Si on est un peu organisé, on profite du calcul déjà fait au 4) b) ; si on l'est moins on recommence et on trouve sans mal :

$$s_{2m+3} - s_{2m+1} = \frac{1}{4m+5} - \frac{1}{4m+7} = \frac{2}{(4m+5)(4m+7)} \qquad \text{et}$$

$$s_{2m} - s_{2m+2} = \frac{1}{4m+3} - \frac{1}{4m+5} = \frac{2}{(4m+3)(4m+5)}.$$

Comme $0 < 4m+3 < 4m+7$, on obtient : $0 < (4m+3)(4m+5) < (4m+5)(4m+7)$ qu'on n'a plus qu'à inverser (et multiplier par 2) pour obtenir le résultat demandé.

b) On applique le a) à m : on sait donc que :

$$0 \leq s_{2m+3} - s_{2m+1} \leq s_{2m} - s_{2m+2}.$$

On recommence en l'appliquant à $m+1$: on obtient

$$0 \leq s_{2m+5} - s_{2m+3} \leq s_{2m+2} - s_{2m+4}.$$

On recommence avec $m+2, m+3, \dots m+l-1$ et on obtient une collection d'inégalités, la dernière étant :

$$0 \leq s_{2m+2l+1} - s_{2m+2l-1} \leq s_{2m+2l-2} - s_{2m+2l}.$$

En les sommant toutes, on obtient le résultat demandé.

c) On fait tendre l vers l'infini dans le b). Comme la suite s_n tend vers $\operatorname{Arctan} 1 = \dfrac{\pi}{4}$ par la question 4 e), on obtient le premier groupe d'inégalités.

Pour le second, on remarque d'abord que $s_{2m} - s_{2m+1} = (s_{2m} - \dfrac{\pi}{4}) + (\dfrac{\pi}{4} - s_{2m+1}) \geq 0 + 0 = 0$. La deuxième inégalité à prouver n'est qu'un regroupement différent de la deuxième inégalité du premier groupe.

6) a) L'erreur faite est minorée par $\dfrac{1}{2}(s_{200000} - s_{200001}) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{400003} = \dfrac{1}{800006} > 10^{-6}$.

b) Par le 5) c), $s_{500001} \leq \dfrac{\pi}{4} \leq s_{500000}$ donc l'erreur faite en approchant $\dfrac{\pi}{4}$ par s_{500000} est plus petite que la différence $s_{500000} - s_{500001} = \dfrac{1}{1000003} < 10^{-6}$.

7) a) Comme $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{4}$. De même, $0 \leq \beta < \dfrac{\pi}{4}$. On en déduit $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha - 2\beta \leq \dfrac{\pi}{4}$, et *a fortiori* que $\alpha - 2\beta$ est dans l'intervalle proposé par l'énoncé.

b) Si on sait de la trigonométrie, on obtient sans mal, en se trompant peut-être une fois mais en recommençant au vu du c) que :

$$\tan(2\beta) = \frac{2b}{1-b^2} \qquad \text{puis que } \tan(\alpha - 2\beta) = \frac{a - ab^2 - 2b}{1 + 2ab - b^2}.$$

c) Les deux angles $\alpha - 2\beta$ et $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{a - ab^2 - 2b}{1 + 2ab - b^2}\right)$ ont la même tangente, et sont tous deux dans l'intervalle $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$. Ils sont donc égaux.

d) En appliquant le c) à $a = 1$ et $b = 1/3$, on obtient $\operatorname{Arctan} 1 - 2 \operatorname{Arctan}(1/3) = \operatorname{Arctan}(1/7)$. En recommençant avec $a = 1/3$ et $b = 1/7$, on obtient : $\operatorname{Arctan}(1/3) - 2 \operatorname{Arctan}(1/7) = \operatorname{Arctan}(3/79)$.

On a alors assez de matériel pour écrire :

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan} 1 = 2 \operatorname{Arctan}(1/3) + \operatorname{Arctan}(1/7) = 2\,(2 \operatorname{Arctan}(1/7) + \operatorname{Arctan}(3/79)) + \operatorname{Arctan}(1/7)$$

qui donne, après regroupement, le résultat proposé.

8) a) On calcule et majore :

$$\begin{aligned} x^{2n+3} + x^{2n+5} + \dots + x^{2n+2r+1} &= x^{2n+3}(1 + x^2 + \dots + (x^2)^{r-1}) \\ &= x^{2n+3}\frac{1 - x^{2r}}{1 - x^2} \leq x^{2n+3}\frac{1}{1 - x^2} \\ &\leq x^{2n+3}\frac{1}{1 - (1/7)^2} = \frac{49}{48}x^{2n+3}. \end{aligned}$$

b) On calcule et majore :

$$|S_{n+r}(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+r} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+r} |u_k(x)| = \sum_{k=n+1}^{n+r} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \leq \frac{1}{2n+3} \sum_{k=n+1}^{n+r} x^{2k+1}.$$

c) On passe à la limite quand r tend vers l'infini dans le b), en récupérant la majoration du a).

9) et 10) Plus de place : ça ne vaut pas le coup d'aller à la page, travaillez plutôt ça vous-mêmes, c'est plus profitable que de lire un corrigé !