Dans tout le problème, on notera, pour tout réel x et tout entier $k \geq 0$:

$$u_k(x) = (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

et, pour tout réel x et tout entier $n \geq 0$:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x).$$

Première partie

1) Montrer que pour tout x réel et tout $n \geq 0$:

$$S_n'(x) = \frac{1 + (-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

2) En déduire que pour tout $m \geq 0$ et tout x réel :

$$\frac{1}{1+x^2} \leq S_{2m}'(x) \qquad \text{tandis que} \qquad S_{2m+1}'(x) \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

3) En introduisant la fonction g_n de $[-1, 1]$ vers $\mathbf{R}$ définie par $g_n(x) = \operatorname{Arctan} x - S_n(x)$, montrer que pour tout $m \geq 0$ et tout x réel positif :

$$\operatorname{Arctan} x \leq S_{2m}(x) \qquad \text{tandis que} \qquad S_{2m+1}(x) \leq \operatorname{Arctan} x.$$

4) Dans cette question, on fixe un réel x qui vérifie : $0 \leq x \leq 1$.

a) Montrer que les suites $(S_{2m+1}(x))_{m\geq 0}$ et $(S_{2m}(x))_{m\geq 0}$ sont des suites adjacentes.

b) En déduire que la suite $(S_n(x))_{n\geq 0}$ est une suite convergente.

c) Montrer que $S_n(x) \to \operatorname{Arctan} x$ quand $n \to +\infty$.

5) Dans cette question et dans la suivante, on allège les notations en posant $s_n = S_n(1)$.

a) Montrer que pour tout $m \geq 0$:

$$0 \leq s_{2m+3} - s_{2m+1} \leq s_{2m} - s_{2m+2}.$$

b) En déduire que pour tout $m \geq 0$ et tout $l \geq 1$:

$$0 \leq s_{2m+2l+1} - s_{2m+1} \leq s_{2m} - s_{2m+2l}.$$

c) En utilisant le 4 c), en déduire que pour tout $m \geq 0$:

$$0 \leq \frac{\pi}{4} - s_{2m+1} \leq s_{2m} - \frac{\pi}{4}$$

puis que :

$$|\frac{\pi}{4} - s_{2m}| \geq \frac{1}{2}|s_{2m} - s_{2m+1}|.$$

6) a) Déduire de l'inégalité qui précède que si on approche $\frac{\pi}{4}$ par s_{400000}, on commet une erreur strictement supérieure à 10^{-6}.

b) Montrer que s_{500000} est une valeur approchée de $\frac{\pi}{4}$ à 10^{-6} près.

Deuxième partie

7) Soit a et b deux réels vérifiant respectivement : $0 \leq a \leq 1$ et $0 \leq b < 1$.

a) Calculer $\tan(2 \operatorname{Arctan} b)$ puis $\tan(\operatorname{Arctan} a - 2 \operatorname{Arctan} b)$.

b) Montrer l'identité :

$$\operatorname{Arctan} a - 2 \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan}\left(\frac{a - 2b - ab^2}{1 + 2ab - b^2}\right). \qquad (*)$$

c) En appliquant $(*)$ dans un premier temps à $a = 1$ et $b = 1/3$ puis dans un second temps à $a = 1/3$ et $b = 1/7$, montrer que :

$$\frac{\pi}{4} = 5 \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{Arctan} \frac{3}{79}.$$

Troisième partie
Dans cette partie, pour tout $n \geq 1$, on note :

$$t_n = 5S_n\left(\frac{1}{7}\right) + 2S_n\left(\frac{3}{79}\right).$$

8) Soit x un réel qui vérifie $0 \leq x \leq \frac{1}{7}$, et soit deux entiers $n \geq 1$ et $r \geq 1$.

a) Montrer que :

$$x^{2n+3} + x^{2n+5} + \cdots + x^{2n+2r+1} \leq \frac{49}{48}x^{2n+3}.$$

b) Montrer que par ailleurs :

$$S_{n+r}(x) - S_n(x) \leq \frac{1}{2n+3}\left(x^{2n+3} + x^{2n+5} + \cdots + x^{2n+2r+1}\right)$$

c) Déduire de ce qui précède et de la question 4 c) que :

$$|\operatorname{Arctan} x - S_n(x)| \leq \frac{49}{48(2n+3)}x^{2n+3}$$

9) a) Vérifier, en utilisant la calculette, que :

$$\frac{1}{48}\left(\frac{5}{7^3} + 2\left(\frac{3}{79}\right)^3\right) \leq 3,2 \times 10^{-4}.$$

b) Déduire de diverses questions précédentes que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\left|\frac{\pi}{4} - t_n\right| \leq \frac{1}{2n+3}\left(\frac{1}{49}\right)^{n-1} \times 3,2 \times 10^{-4}$$

10) a) Montrer que t_2 est une valeur approchée de $\frac{\pi}{4}$ à 10^{-6} près.

b) Fournir une valeur de n pas trop grosse pour laquelle t_n est une valeur approchée de $\frac{\pi}{4}$ à 10^{-20} près.