Exercice 1
$68 = 5 \times 13 + 3$ donc $\cos(\frac{68}{13}\pi) = \cos(4\pi + \pi + \frac{3}{13}\pi) = -\cos(\frac{3}{13}\pi) = \cos(\frac{10}{13}\pi)$.
Ainsi $\frac{10}{13}\pi$ est dans l'intervalle $[0, \pi]$ tout en ayant le même cosinus que $\mathrm{Arccos}\big(\cos(\frac{68}{13}\pi)\big)$. Ces deux réels sont donc égaux.

Exercice 2
1) Soit un x dans $]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1[$.
On calcule d'abord $(2x\sqrt{1-x^2})^2 = 4x^2(1-x^2) = 4x^2 - 4x^4$ puis la différence

$$1 - (2x\sqrt{1-x^2})^2 = 1 - 4x^2 + 4x^4 = (2x^2-1)^2.$$

Ce nombre est strictement positif, car vu l'intervalle auquel on s'est restreint, le réel $2x^2$ n'est pas égal à 1. On en conclut que $2x\sqrt{1-x^2} \in]-1, 1[$ et appartient donc au domaine de définition de Arcsin et même au domaine dans lequel Arcsin est dérivable. Par ailleurs $2\,\mathrm{Arcsin}$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et *a fortiori* sur l'intervalle proposé par l'énoncé.
L'expression $f(x)$ a donc bien un sens, et la fonction f est dérivable en x.
2) Pour x dans $]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1[$, on notera $u(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.
Sur cet intervalle, on calcule :

$$\frac{du}{dx} = 2\sqrt{1-x^2} - \frac{4x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-x^2) - 2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On est alors prêt à calculer :

$$\frac{df}{dx} = 2\frac{d\,\mathrm{Arcsin}\,x}{dx} + \frac{du}{dx} \cdot \frac{d\,\mathrm{Arcsin}\,u}{du} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

expression dans laquelle

$$\sqrt{1-u^2} = \sqrt{1-(2x\sqrt{1-x^2})^2} = \sqrt{(2x^2-1)^2} = |2x^2-1| = 2x^2-1.$$

En synthétisant :

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}(2x^2-1)} = 0.$$

3) f' est nulle et l'ensemble de définition est un intervalle : f est donc constante. Pour déterminer la valeur c qu'elle prend, on peut regarder son comportement pour x tendant vers 1^- : d'une part $f(x) = c$ tend vers c, d'autre part il tend vers $2\,\mathrm{Arcsin}\,1 + \mathrm{Arcsin}\,0 = \pi$.
f est donc la fonction constante prenant sur tout l'intervalle de définition la valeur π.
4) Soit x dans $]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1[$. Posons $\theta = \mathrm{Arcsin}\,x$ de sorte que $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $x = \sin\theta$.
Avec cette notation,

$$2x\sqrt{1-x^2} = 2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta} = 2\sin\theta|\cos\theta| = 2\sin\theta\cos\theta = \sin(2\theta) = \sin(\pi - 2\theta).$$

Dans ce calcul, la dernière manipulation est motivée par la remarque suivante : $\pi - 2\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[\subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, ce qui permet d'écrire que $\mathrm{Arcsin}(\sin(\pi - 2\theta)) = \pi - 2\theta$.
On peut alors conclure :

$$f(x) = 2\,\mathrm{Arcsin}\,x + \mathrm{Arcsin}(\sin(\pi - 2\theta)) = 2\theta + (\pi - 2\theta) = \pi.$$

Exercice 3
1) On dessine le triangle suggéré. Au vu des relations trigonométriques dans un triangle rectangle, $\tan\theta = b/a$. Comme on a en outre supposé que θ est dans $]0, \pi/2[$, on conclut que $\mathrm{Arctan}(b/a) = \theta$.

2) Pour m entier strictement positif, notons θ_m l'argument de $m+i$ strictement compris entre 0 et $\pi/2$. Avec cette convention de notation, $\theta_2+\theta_5+\theta_8$ est un argument de $(2+i)(5+i)(8+i)$. La question 1 a par ailleurs montré que pour tout m, $\theta_m = \text{Arctan}(1/m)$. En rapprochant les deux informations, on conclut.

3) Le calcul fournit $(2+i)(5+i)(8+i) = 65+65i$. Un argument en est $\pi/4$. Par ailleurs pour $m \in \{2,5,8\}$, $0 \le \text{Arctan}(1/m) \le \pi/4$ et donc :

$$0 \le \text{Arctan}(\frac{1}{2}) + \text{Arctan}(\frac{1}{5}) + \text{Arctan}(\frac{1}{8}) \le \frac{3\pi}{4}.$$

Mais $\dfrac{\pi}{4}$ est le seul argument de $65+65i$ à être dans l'intervalle $[0, 3\pi/4]$: il est donc égal à la somme d'arctangentes de l'énoncé.

Exercice 4

1) a) Facile...

b) On explicite v_1 et w_1 et on remarque que $2u - 8v_1 + w_1 = 0$.

2) Les vecteurs $(2,1)$ et $(1,0)$ ne sont visiblement pas proportionnels, donc $(1,2,1)$ et $(m,1,0)$ dont ils sont la terminaison non plus.

3) Soit λ, μ, ν trois réels, et m un réel. Alors :

$$\lambda u + \mu v_m + \nu w_m = 0 \iff \begin{cases} \lambda + m\mu + (5+m)\nu = 0 \\ 2\lambda + \mu + 4\nu = 0 \\ \lambda - (m+1)\nu = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (1-2m)\lambda + (5-3m)\nu = 0 & (L_1 - mL_2) \\ 2\lambda + \mu + 4\nu = 0 \\ \lambda - (m+1)\nu = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2(m^2+2m-3)\nu = 0 & (L_1 + (2m-1)L_3) \\ 2\lambda + \mu + 4\nu = 0 \\ \lambda - (m+1)\nu = 0 \end{cases}$$

Ceci amène à distinguer deux cas : dans un premier temps on traite le cas où $m^2+2m-3=0$ c'est-à-dire où $m=-3$ ou $m=1$. Dans ce cas, on constate que $(m+1, -2m-6, 1)$ est une solution non nulle du système. La famille (u, v_m, w_m) est donc liée.
Dans un second temps on traite d'un m ni égal à -3 ni égal à 1. Pour une telle valeur le coefficient de ν dans la première équation se simplifie, puis sans mal on constate que $\lambda=\mu=\nu=0$ en est la seule solution : la famille (u, v_m, w_m) est donc libre.

4) On est amené à faire la même discussion qu'à la question précédente. Si $m \neq -3$ et $m \neq 1$, on pourrait refaire les mêmes calculs avec un second membre qui ne serait plus nul ; ceci amène à s'apercevoir qu'il y a une et une seule solution. Les cas spécialisés sont à traiter à part, l'un après l'autre ; on devrait ne trouver aucune solution si $m=-3$ et une infinité (les $(3+2\alpha, -2-8\alpha, \alpha)$) si $m=1$.

Exercice 5

1) Il y a beaucoup de réponses possibles pour le point, pour le vecteur directeur aussi, mais on préfèrerait qu'il soit trouvé proportionnel à $(2,-3,1)$.

2) a) Sous l'hypothèse suggérée, il existe λ et μ tels que $(a,b,c) = \lambda(1,1,1) + \mu(2,1,-1)$. Soit un point (x,y,z) de D qui vérifie donc les deux équations des deux plans Π_1 et Π_2. En multipliant la première par λ et la deuxième par μ, il vérifie donc aussi l'équation $ax+by+cz=\lambda$. Deux cas peuvent alors être distingués : si $\lambda=3$, on constate que D est incluse dans Π_3 et donc que $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = D \cap \Pi_3 = D$; au contraire si $\lambda \neq 3$ cette équation est incompatible avec celle de Π_3, donc $D \cap \Pi_3$ est vide.

b) Une façon de voir ça est de remarquer que $(1,1,1)$ et $(2,1,-1)$ sont deux vecteurs normaux à D, donc que leurs combinaisons linéaires sont les vecteurs normaux à D. L'hypothèse dit alors que le vecteur (a,b,c), qui est normal à Π_3, n'est pas normal à D, donc que la droite D n'est pas parallèle à Π_3. Elle le rencontre donc en un et un seul point, et dès lors $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = D \cap \Pi_3$ est un singleton.