Exercice 1
Déterminer $\text{Arccos}\left(\cos(\frac{68}{13}\pi)\right)$.

Exercice 2
On définit une fonction f sur $]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1[$ par :

$$f(x) = 2 \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}).$$

1) Justifier que l'expression qui définit f a bien un sens pour x élément de l'intervalle $]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1[$ et montrer que f est dérivable sur cet intervalle.

2) Calculer la dérivée f'.

3) En déduire une expression beaucoup plus simple de la fonction f.

4) (Bonus !) Obtenir le résultat du 3 en faisant un peu de trigonométrie élémentaire, mais sans effectuer de calcul de dérivée.

Exercice 3
1) Soit a et b deux réels strictement positifs. On note θ l'argument du nombre complexe $a + ib$ qui vérifie $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.
En se penchant sur le triangle de sommets 0, a et $a + ib$, montrer que :

$$\theta = \operatorname{Arctan} \frac{b}{a}.$$

2) En déduire que le réel

$$\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8}$$

est un argument du nombre complexe $(2 + i)(5 + i)(8 + i)$.

3) Calculer les parties réelle et imaginaire de $(2 + i)(5 + i)(8 + i)$ et en déduire une expression simple de :

$$\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8}.$$

Exercice 4
Dans cet exercice on travaille dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^3$. On pose $u = (1, 2, 1)$ et, pour tout m réel :

$$v_m = (m, 1, 0) \qquad \text{et} \qquad w_m = (5 + m, 4, -m - 1).$$

1) a) Montrer que (u, v_{-1}, w_{-1}) est libre.
   b) Montrer que (u, v_1, w_1) est liée.

2) Montrer que pour toute valeur du paramètre réel m, la famille (u, v_m) est libre.

3) Discuter en fonction du paramètre réel m pour quelles valeurs de ce paramètre la famille (u, v_m, w_m) est libre.

4) Discuter en fonction du paramètre réel m le nombre de solutions du système suivant, d'inconnues réelles λ, μ et ν :

$$\lambda u + \mu v_m + \nu w_m = (1, 4, 3).$$

Exercice 5
Dans $\mathbf{R}^3$ on considère les sous-ensembles :

$$\Pi_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 1\} \qquad \text{et} \qquad \Pi_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}.$$

On note $D = \Pi_1 \cap \Pi_2$.

1) Décrire D en en fournissant un point et un vecteur directeur.

2) Dans cette question on considère un triplet de réels $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et on pose :

$$\Pi_3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid ax + by + cz = 3\}.$$

a) Montrer que si la famille $((1, 1, 1), (2, 1, -1), (a, b, c))$ est liée, alors $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$ est soit vide, soit égale à D.

b) On suppose la famille $((1, 1, 1), (2, 1, -1), (a, b, c))$ libre. Que dire de $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$?