Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2013-2014

Math I - CPGEI

Devoir n$^{\text{o}}$ 5

PROBLÈME - CORRECTION

---

1. (a) Soit $\theta \in \mathbf{R}$. On a $X(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$, donc $X(\theta) \in \mathscr{C}$.

   (b) Soit $(x,y) \in \mathscr{C}$. Alors $x^2 + y^2 = 1$ d'où : $|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1} = 1$.

   (c) Soit $(x,y) \in \mathscr{C}$. D'après la question précédente, il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $x + iy = e^{i\theta}$. Alors $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$ et donc $(x,y) = X(\theta)$.

   (d) La question 1.(a) montre que $X(\mathbf{R}) \subset \mathscr{C}$ et la question 1.(c) que $\mathscr{C} \subset X(\mathbf{R})$. Finalement, on a bien $\mathscr{C} = X(\mathbf{R})$.

2. (a) Soit $t \in \mathbf{R}$. On a bien $Y(t) \in \mathscr{C}$ car $Y(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ et

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = \frac{t^4+2t^2+1}{(1+t^2)^2} = \frac{(t^2+1)^2}{(1+t^2)^2} = 1\,.$$

   De plus, on a

$$Y(t) = (-1,0) \Leftrightarrow \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) = (-1,0) \Leftrightarrow \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} = -1 \text{ et } t = 0\right) \Leftrightarrow (1 = -1 \text{ et } t = 0)\,.$$

   Donc $Y(t) \in \mathscr{C} \setminus \{(-1,0)\}$.

   (b) Soit $\theta \in \mathbf{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z})$. Alors

$$\frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{1+\dfrac{(\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2}} = \frac{(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = (\cos\theta)^2\,.$$

   (c) Soit $\theta \in \mathbf{R} \setminus (\pi + 2\pi\mathbf{Z})$,

$$\begin{aligned}\frac{1-(\tan(\frac{\theta}{2}))^2}{1+(\tan(\frac{\theta}{2}))^2} &= (\cos(\tfrac{\theta}{2}))^2 \times \left(1 - \frac{(\sin(\frac{\theta}{2}))^2}{(\cos(\frac{\theta}{2}))^2}\right) = (\cos(\tfrac{\theta}{2}))^2 - (\sin(\tfrac{\theta}{2}))^2 \\ &= \cos(2\,\tfrac{\theta}{2}) = \cos\theta\,.\end{aligned}$$

   On a également :

$$\begin{aligned}\frac{2\,\tan(\frac{\theta}{2})}{1+(\tan(\frac{\theta}{2}))^2} &= (\cos(\tfrac{\theta}{2}))^2 \times 2\,\frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})} = 2\,\sin(\tfrac{\theta}{2})\,\cos(\tfrac{\theta}{2}) \\ &= \sin(2\,\tfrac{\theta}{2}) = \sin\theta\,.\end{aligned}$$

   (d) La question 2.(a) montre que $Y(\mathbf{R}) \subset \mathscr{C} \setminus \{(-1,0)\}$.
   Soit $(x,y) \in \mathscr{C} \setminus \{(-1,0)\}$. On a vu qu'il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $(x,y) = (\cos\theta, \sin\theta)$.
   Alors $\theta \notin \pi + 2\pi\mathbf{Z}$ car $(x,y) \neq (-1,0)$.
   En posant $t = \tan(\frac{\theta}{2})$, on déduit $(x,y) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) = Y(t) \in Y(\mathbf{R})$.
   D'où $\mathscr{C} \setminus \{(-1,0)\} \subset Y(\mathbf{R})$ puis $Y(\mathbf{R}) = \mathscr{C} \setminus \{(-1,0)\}$.

(e) Soit $t \in \mathbf{R}^*$. Alors

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{\frac{1}{t^2}-1}{\frac{1}{t^2}+1} \xrightarrow[|t|\to\infty]{} -1\ ;$$

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{1}{t} \times \frac{2}{1+\frac{1}{t^2}} \xrightarrow[|t|\to\infty]{} 0.$$

3. (a) Soit $(x,y) \in \mathscr{D}_0$. Alors $x=0$ et $x^2-y^2=-y^2 \leq 0 < 1$, d'où $(x,y) \notin \mathscr{H}$. Ainsi $\mathscr{H} \cap \mathscr{D}_0 = \emptyset$.

(b) Pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$\phi \circ \phi((x,y)) = \phi((-x,y)) = (-(-x),y) = (x,y)\,.$$

D'où $\phi \circ \phi = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}$.

(c) Soit $(u,v) \in \phi(\mathscr{H} \cap \mathscr{P}_+)$. Il existe $(x,y) \in \mathscr{H} \cap \mathscr{P}_+$ tel que $\phi(x,y) = (u,v)$.
Ainsi $(-x,y) = (u,v)$, et par suite :

$$u^2 - v^2 = (-x)^2 - y^2 = x^2 - y^2 = 1$$

car $(x,y) \in \mathscr{H}$. De plus, $u = -x < 0$ car $x > 0$ puisque $(x,y) \in \mathscr{P}_+$. D'où $(u,v) \in \mathscr{H} \cap \mathscr{P}_-$.
On a donc montré que $\phi(\mathscr{H} \cap \mathscr{P}_+) \subset \mathscr{H} \cap \mathscr{P}_-$.
La démonstration est similaire pour $\phi(\mathscr{H} \cap \mathscr{P}_-) \subset \mathscr{H} \cap \mathscr{P}_+$.

(d) Comme $\phi(\mathscr{H} \cap \mathscr{P}_-) \subset \mathscr{H} \cap \mathscr{P}_+$ et $\phi \circ \phi = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}$, on a

$$\mathscr{H} \cap \mathscr{P}_- = (\phi \circ \phi)(\mathscr{H} \cap \mathscr{P}_-) = \phi(\phi(\mathscr{H} \cap \mathscr{P}_-)) \subset \phi(\mathscr{H} \cap \mathscr{P}_+)\,.$$

L'inclusion réciproque a été démontrée à la question précédente. Par conséquent on a bien $\phi(\mathscr{H} \cap \mathscr{P}_+) = \mathscr{H} \cap \mathscr{P}_-$.

4. (a) Soit $x \in \mathbf{R}$. Puisque $\cosh x > 0$, on a $Z(x) = (\cosh x, \sinh x) \in \mathscr{P}_+$. De plus,

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = 1\,.$$

Ainsi $Z(x) \in \mathscr{H}$ donc $Z(x) \in \mathscr{P}_+ \cap \mathscr{H}$.

(b) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $(\sinh)'(x) = \cosh x > 0$. Ainsi sinh est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbf{R}$, donc injective. Par ailleurs, la fonction sinh tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$. Comme sinh est continue sur l'intervalle $\mathbf{R}$, on déduit alors du théorème des valeurs intermédiaires que sinh est surjective. Finalement sinh est bien bijective.

(c) D'après la question 4.(a), on a $Z(\mathbf{R}) \subset \mathscr{H} \cap \mathscr{P}_+$.
Soit $(x,y) \in \mathscr{H} \cap \mathscr{P}_+$. Puisque sinh est surjective, il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que $y = \sinh t$. Alors, comme $x^2 - y^2 = 1$, on a

$$x^2 = 1 + y^2 = 1 + (\sinh t)^2 = (\cosh t)^2\,.$$

Comme $x > 0$ et $\cosh t > 0$, on déduit $x = \cosh(t)$. Ainsi

$$(x, y) \;=\; (\cosh t, \sinh t) \;=\; Z(t) \;\in\; Z(\mathbf{R})\,.$$

D'où $\mathscr{H} \cap \mathscr{P}_+ \subset Z(\mathbf{R})$ puis $Z(\mathbf{R}) = \mathscr{H} \cap \mathscr{P}_+$.

5. (a) Soit $t \in \mathbf{R}_+^*$. Alors $\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) > 0$, et :

$$\left[\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right]^2 \;=\; \frac{1}{4}\left(t^2 + 2 + \frac{1}{t^2}\right) \;-\; \frac{1}{4}\left(t^2 - 2 + \frac{1}{t^2}\right) \;=\; 1\,.$$

D'où $U(t) \in \mathscr{H} \cap \mathscr{P}_+$. Ainsi $U(\mathbf{R}_+^*) \subset \mathscr{H} \cap \mathscr{P}_+$.

Réciproquement soit $(x, y) \in \mathscr{H} \cap \mathscr{P}_+$. Alors, d'après la question 4.(c), il existe $u \in \mathbf{R}$ tel que $(x, y) = (\cosh u, \sinh u)$. En posant $t = e^u$, on déduit $t > 0$ et

$$(x, y) \;=\; \left(\frac{1}{2}(e^u + e^{-u}), \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})\right) \;=\; \left(\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right) \;=\; U(t) \;\in\; U(\mathbf{R}_+^*)\,.$$

D'où l'inclusion $\mathscr{H} \cap \mathscr{P}_+ \subset U(\mathbf{R}_+^*)$ puis $\mathscr{H} \cap \mathscr{P}_+ = U(\mathbf{R}_+^*)$.

(b) Soit $t \in \mathbf{R}^*$. Alors

$$\begin{aligned}\phi\left(U\left(\frac{1}{t}\right)\right) \;&=\; \phi\left(\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - t\right)\right) \;=\; \left(-\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \frac{1}{2}\left(-t + \frac{1}{t}\right)\right) \\ &=\; \left(\frac{1}{2}\left(-t + \frac{1}{-t}\right), \frac{1}{2}\left(-t - \frac{1}{-t}\right)\right) \;=\; U(-t).\end{aligned}$$

(c) On a : $\mathscr{H} \cap \mathscr{P}_+ = U(\mathbf{R}_+^*)$.

Grâce à la question 3.(d), on déduit aussi $\phi(U(\mathbf{R}_+^*)) = \phi(\mathscr{H} \cap \mathscr{P}_+) = \mathscr{H} \cap \mathscr{P}_-$. Or d'après la question 5.(b), $\phi(U(\mathbf{R}_+^*)) = U(\mathbf{R}_-^*)$ car $\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_-^*$, $t \mapsto -\frac{1}{t}$ est une bijection (de réciproque $\mathbf{R}_-^* \to \mathbf{R}_+^*$, $t \mapsto -\frac{1}{t}$). D'où $U(\mathbf{R}_-^*) = \mathscr{H} \cap \mathscr{P}_-$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathscr{H} \;&=\; (\mathscr{H} \cap \mathscr{P}_+) \cup (\mathscr{H} \cap \mathscr{D}_0) \cup (\mathscr{H} \cap \mathscr{P}_-) \;=\; (\mathscr{H} \cap \mathscr{P}_+) \cup (\mathscr{H} \cap \mathscr{P}_-) \\ &=\; U(\mathbf{R}_+^*) \cup U(\mathbf{R}_-^*) \;=\; U(\mathbf{R}_+^* \cup \mathbf{R}_-^*) \;=\; U(\mathbf{R}^*).\end{aligned}$$