Devoir n° 5
Problème

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

1. On note $\mathscr{C}$ le cercle
$$\mathscr{C} \;=\; \left\{\ (x,y)\in\mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2=1\ \right\}$$
et X le paramétrage de courbe suivant
$$X\ :\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}^2\,,\quad \theta\mapsto(\cos(\theta),\sin(\theta))\,.$$
   (a) Montrer que, pour tout $\theta\in\mathbf{R}$, on a $X(\theta)\in\mathscr{C}$.
   (b) Montrer que, pour tout $(x,y)\in\mathscr{C}$, on a $|x+iy|=1$.
   (c) En déduire que, pour tout $(x,y)\in\mathscr{C}$, il existe $\theta\in\mathbf{R}$ tel que $(x,y)=X(\theta)$.
   (d) Conclure que $\mathscr{C}=X(\mathbf{R})$.

2. On note Y le paramétrage de courbe suivant
$$Y\ :\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}^2\,,\quad t\mapsto\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2\,t}{1+t^2}\right)\,.$$
   (a) Montrer que, pour tout $t\in\mathbf{R}$, on a $Y(t)\in\mathscr{C}\setminus\{(-1,0)\}$.
   (b) Montrer que, pour tout $\theta\in\mathbf{R}\setminus(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbf{Z})$, on a
$$(\cos(\theta))^2 \;=\; \frac{1}{1+(\tan(\theta))^2}\,.$$
   (c) En déduire que, pour tout $\theta\in\mathbf{R}\setminus(\pi+2\pi\mathbf{Z})$, on a
$$\cos(\theta)\;=\;\frac{1-(\tan(\frac{\theta}{2}))^2}{1+(\tan(\frac{\theta}{2}))^2}\qquad\text{et}\qquad \sin(\theta)\;=\;\frac{2\,\tan(\frac{\theta}{2})}{1+(\tan(\frac{\theta}{2}))^2}\,.$$
   (d) Conclure que $\mathscr{C}\setminus\{(-1,0)\}=Y(\mathbf{R})$.
   (e) Montrer que
$$\lim_{|t|\to\infty}\frac{1-t^2}{1+t^2}\;=\;-1\qquad\text{et}\qquad\lim_{|t|\to\infty}\frac{2\,t}{1+t^2}\;=\;0\,.$$

3. On note $\mathscr{H}$ l'hyperbole

$$\mathscr{H} \;=\; \left\{ \, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^2 - y^2 = 1 \, \right\}$$

et l'on décompose le plan $\mathbf{R}^2$ comme $\mathbf{R}^2 = \mathscr{P}_+ \cup \mathscr{D}_0 \cup \mathscr{P}_-$ où $\mathscr{D}_0$ est la droite

$$\mathscr{D}_0 \;=\; \left\{ \, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x = 0 \, \right\}$$

et $\mathscr{P}_+$ et $\mathscr{P}_-$ sont les demi-plans

$$\mathscr{P}_+ \;=\; \left\{ \, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x > 0 \, \right\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{P}_- \;=\; \left\{ \, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x < 0 \, \right\} .$$

   (a) Montrer que $\mathscr{H} \cap \mathscr{D}_0 = \emptyset$.

   (b) On note ϕ la symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{D}_0$

$$\phi \;:\; \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \,, \quad (x,y) \mapsto (-x,y) \,.$$

   Montrer que $\phi \circ \phi = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}$.

   (c) Montrer que

$$\phi(\mathscr{H} \cap \mathscr{P}_+) \subset \mathscr{H} \cap \mathscr{P}_- \qquad \text{et} \qquad \phi(\mathscr{H} \cap \mathscr{P}_-) \subset \mathscr{H} \cap \mathscr{P}_+ \,.$$

   (d) En déduire que $\phi(\mathscr{H} \cap \mathscr{P}_+) = \mathscr{H} \cap \mathscr{P}_-$.

On rappelle les définitions des fonctions hyperboliques

$$\cosh \;:\; \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,, \quad x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sinh \;:\; \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,, \quad x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \,.$$

4. On note Z le paramétrage de courbe suivant

$$Z \;:\; \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2 \,, \quad x \mapsto (\cosh(x), \sinh(x)) \,.$$

   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $Z(x) \in \mathscr{H} \cap \mathscr{P}_+$.

   (b) Montrer que sinh est une bijection.

   (c) En déduire que $\mathscr{H} \cap \mathscr{P}_+ = Z(\mathbf{R})$.

5. On note U le paramétrage de courbe suivant

$$U \;:\; \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^2 \,, \quad t \mapsto \left(\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) \right) \,.$$

   (a) Montrer que $\mathscr{H} \cap \mathscr{P}_+ = U(\mathbf{R}_+^*)$.

   (b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $U(-t) = \phi\left(U\left(\frac{1}{t}\right)\right)$.

   (c) En déduire que $\mathscr{H} = U(\mathbf{R}^*)$.