Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2013-2014

Math I - CPGEI

Devoir n° 5

Partie commune - Correction

Exercice 1.

1. $5^1 \equiv 5$ [7].
   $5^2 \equiv 4$ [7] car $5^2 = 25 = 3 \times 7 + 4$.
   D'où $5^3 \equiv -1$ [7] car $5 \times 4 = 20 = 3 \times 7 - 1$.
   Donc $5^6 \equiv 1$ [7] et $k_0 = 6$ convient.
2. Il existe $q \in \mathbf{Z}$ tel que $n = qk_0 + r$. D'où $5^n = (5^{k_0})^q \times 5^r$ et $5^n \equiv 1^q \times 5^r$ [7]. Ainsi $5^n \equiv 5^r$ [7].
3. $457 = 6 \times 76 + 1$ et $1 \in [\![0;5]\!]$, donc le reste de la division de 457 par 6 est 1. D'où $5^{457} \equiv 5^1$ [7].
   Par conséquent, comme $5 \in [\![0;6]\!]$, le reste cherché est 5.
4. $271 = 7 \times 38 + 5$, d'où $271 \equiv 5$ [7] et $271^{201} \equiv 5^{201}$ [7].
   De plus, $201 = 6 \times 33 + 3$ et $3 \in [\![0;5]\!]$, donc le reste de la division de 201 par 6 est 3. D'où $5^{201} \equiv 5^3$ [7].
   Or on a vu que $5^3 \equiv -1$ [7]. D'où $5^3 \equiv 6$ [7] car $-1 = (-1) \times 7 + 6$. Donc, comme $6 \in [\![0;6]\!]$, le reste cherché est 6.

Exercice 2.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{y \to 0} \arctan y = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = e^0 = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = e^0 = 1$.
2. $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{y \to -\infty} \arctan y = -\frac{\pi}{2}$, donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = e^{-\pi/2}$.
   $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{y \to +\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = e^{\pi/2}$.
3. La fonction $\mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$, les fonctions $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $y \mapsto \arctan y$ et $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $z \mapsto e^z$ sont dérivables sur $\mathbf{R}$. Donc f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables.
   De plus, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$,
$$f'(x) \;=\; -\frac{1}{x^2}\,\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,e^{\arctan\frac{1}{x}} \;=\; \frac{-1}{x^2+1}\,e^{\arctan\frac{1}{x}}.$$
4. D'après les questions précédentes, on a :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	1		$\Vert$ $e^{\pi/2}$		
		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	
			$e^{-\pi/2}$ $\Vert$		1

Exercice 3.

1. G est dérivable et, pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, $G'(t) = \ln t + t \times \frac{1}{t} - 1 = \ln t$. Donc $G' = g$, G est une primitive de g.

2. (a) L'équation homogène est : $\forall t \in \mathbf{R}_+^*,\ f'(t) + (\ln t) f(t) = 0$.
   L'ensemble $\mathbf{R}_+^*$ étant un intervalle, les solutions sont les fonctions $f_H : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ données par

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*,\ f_H(t) = \lambda\, e^{-G(t)} = \lambda\, e^{-t\ln t + t},$$

   pour un certain $\lambda \in \mathbf{R}$. Par conséquent, l'ensemble des solutions est :

$$\left\{ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R},\ t \mapsto \lambda\, e^{-t\ln t+t} \;\middle|\; \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$

   (b) Pour chercher une solution particulière de (E), on se donne $\lambda : \mathbf{R}_+^\star \to \mathbf{R}$ dérivable et l'on définit $f_p : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$, $t \mapsto \lambda(t)\, e^{-t\ln t+t}$.
   Alors f_p est dérivable et, pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, $f_p'(t) = \lambda'(t) e^{-t\ln t+t} - \lambda(t)(\ln t) e^{-t\ln t+t}$ donc

$$f_p'(t) + (\ln t) f_p(t) \;=\; \lambda'(t)\, e^{-t\ln t+t}.$$

   Ainsi f_p est solution de (E) dès lors que : $\forall t \in \mathbf{R}_+^*,\ \lambda'(t) = e^{-t}$. En particulier, la fonction $\lambda : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$, $t \mapsto -e^{-t}$ convient et donne $f_p : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$, $t \mapsto -e^{-t\ln t}$ comme solution particulière.

   (c) D'après les questions précédentes, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R},\ t \mapsto \lambda\, e^{-t\ln t+t} - e^{-t\ln t} \;\middle|\; \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$

3. Il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $t \in \mathbf{R}_+^\star$, $\phi(t) = \lambda\, e^{-t\ln t+t} - e^{-t\ln t}$. En particulier $-1 = \phi(1) = \lambda e - 1$. Par conséquent, $\lambda = 0$ et

$$\phi : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}, \quad t \mapsto -e^{-t\ln t}.$$

Exercice 4.

1. Vrai. $(1+i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4$.
2. Faux. 2 et 2 divisent 2 mais $2 \times 2 = 4$ ne divise pas 2 car $2 < 4$ et $2 \neq 0$.
3. Vrai. Puisque $e^{\frac{2i\pi}{7}} \neq 1$, car $\frac{1}{7} \notin \mathbf{Z}$, la somme s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{6} e^{\frac{2ik\pi}{7}} = \sum_{k=0}^{6} \left(e^{\frac{2i\pi}{7}}\right)^k = \frac{1 - \left(e^{\frac{2i\pi}{7}}\right)^7}{1 - e^{\frac{2i\pi}{7}}} = \frac{1 - e^{2i\pi}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{7}}} = 0.$$

4. Faux. $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} < 0$.
5. Faux. $f(1) = f\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)$ mais $1 \neq e^{\frac{2i\pi}{3}}$ car $\frac{1}{3} \notin \mathbf{Z}$.