Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2013-2014

Math I - CPGEI

Devoir n° 5

PARTIE COMMUNE

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

Exercice 1.

1. Déterminer $k_0 \in \mathbf{N}^\star$ tel que $5^{k_0} \equiv 1\ [7]$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$ et r le reste de la division euclidienne de n par k_0.
   Montrer que $5^n \equiv 5^r\ [7]$.
3. En déduire le reste de la division euclidienne de 5^{457} par 7.
4. Quel est le reste de la division euclidienne de 271^{201} par 7 ?

Exercice 2. On considère la fonction $f : \mathbf{R}^\star \to \mathbf{R}$, $x \mapsto e^{\arctan \frac{1}{x}}$.

1. Étudier la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier la limite de f à gauche et à droite en 0.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbf{R}^\star$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^\star$.
4. Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbf{R}^\star$.

Exercice 3.

1. Démontrer que la fonction $G : \mathbf{R}_+^\star \to \mathbf{R}$, $t \mapsto t\ln t - t$ est une primitive de $g : \mathbf{R}_+^\star \to \mathbf{R}$, $t \mapsto \ln t$.

On considère l'équation différentielle (E) : $\forall t \in \mathbf{R}_+^\star,\ f'(t) + (\ln t)f(t) = e^{-t\ln t}$.

2. (a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E).
   (b) Déterminer une solution particulière de (E).
   (c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).
3. Déterminer $\phi : \mathbf{R}_+^\star \to \mathbf{R}$ la solution de (E) telle que $\phi(1) = -1$.

Exercice 4. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. Le nombre complexe $1+i$ est une racine quatrième de -4.
2. Pour tout $(n,a,b) \in (\mathbf{N}^{\star})^3$, si a divise n et si b divise n, alors le produit ab divise n.
3. On a : $1 + e^{\frac{2i\pi}{7}} + e^{\frac{4i\pi}{7}} + e^{\frac{6i\pi}{7}} + e^{\frac{8i\pi}{7}} + e^{\frac{10i\pi}{7}} + e^{\frac{12i\pi}{7}} = 0$.
4. Pour tout $x \in [-1,1]$, $\arcsin x \geq 0$.
5. La fonction $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $z \mapsto z^3$ est injective.