Université Claude Bernard - Lyon 1
Cursus préparatoire, semestre 2 Semestre de printemps 2012-2013

Devoir en classe numéro 5
PARTIE COMMUNE. DURÉE : 1H30

Exercice 1
Soit h l'application de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ définie pour $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ par

$$h[(x, y, z)] = (z, x - y, -2x + 2y).$$

1. Montrer que h est une application linéaire.
2. Donner une base de $\operatorname{Ker} h$.
3. Donner une base de $\operatorname{Im} h$.
4. Est-il vrai que $\mathbf{R}^3 = \operatorname{Ker} h \oplus \operatorname{Im} h$?

Exercice 2
On note $\mathbf{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbf{R}$ de degré inférieur ou égal à 3. On définit une application linéaire $f : \mathbf{R}_3[X] \to \mathbf{R}^3$ par

$$f(P) = (P(-1), P(0), P(1)).$$

On définit également une application linéaire $g : \mathbf{R}_3[X] \to \mathbf{R}_3[X]$ par $g(P) = P'$.
1. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$. Est-ce que f est injective ? surjective ?
2. Montrer que $\mathbf{R}_3[X] = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$.

Exercice 3

1. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par
$$f(x) = \frac{\ln(x)}{(x+1)^2}.$$
Déterminer les primitives de f à l'aide d'une intégration par parties. Quelle est la primitive F de f qui vérifie $F(1) = 0$?
2. Calculer
$$\int \frac{x+2}{x^2 + 3x - 4} dx.$$
3. Calculer l'intégrale suivante, à l'aide d'un changement de variable
$$\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx.$$
4. On note
$$I = \int_{1/2}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan(x) dx.$$
A l'aide du changement de variable $u = 1/x$, déterminer la valeur de I. On pourra utiliser la formule suivante valable pour $u > 0$
$$\arctan(u) + \arctan(1/u) = \pi/2. \tag{1}$$

Question subsidiaire : démontrer la formule (1).