Devoir en classe numéro 5 : corrigé

Exercice 1

1. C'est sans difficulté : pour des vecteurs $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{u}' = (x', y', z')$ de $\mathbf{R}^3$, et des réels λ, λ', on a

$$\begin{aligned} h(\lambda\vec{u} + \lambda'\vec{u}') &= h[(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z')] \\ &= (\lambda z + \lambda' z', \lambda x + \lambda' x' - \lambda y - \lambda' y', -2\lambda x - 2\lambda' x' + 2\lambda y + 2\lambda' y') \\ &= \lambda(z, x - y, -2x + 2y) + \lambda'(z', x' - y', -2x' + 2y') \\ &= \lambda h(\vec{u}) + \lambda' h(\vec{u}') \end{aligned}$$

2. On résout l'équation $h[(x, y, z)] = \vec{0}$, en remarquant que les condtitions $x - y = 0$ et $-2x + 2y = 0$ sont équivalentes

$$h[(x, y, z)] = \vec{0} \iff z = 0 \text{ et } x - y = 0 \text{ et } -2x + 2y = 0 \iff z = 0 \text{ et } x = y.$$

Notons $\vec{w} = (1, 1, 0)$. Nous venons de montrer que

$$\vec{u} \in \operatorname{Ker} h \iff \exists x \in \mathbf{R} \text{ t.q. } \vec{u} = (x, x, 0) \iff \vec{u} \in \operatorname{Vect}\{\vec{w}\}.$$

Ainsi, une base de $\operatorname{Ker} h$ est $(\vec{w})$, et par conséquent $\operatorname{Ker} h$ est de dimension 1.

3. On a par le théorème du rang,

$$3 = \dim(\mathbf{R}^3) = \dim(\operatorname{Ker} h) + \dim(\operatorname{Im} h),$$

d'où l'on tire que $\operatorname{Im} h$ est de dimension 2. Les vecteurs $\vec{v}_1 = h(1, 0, 0) = (0, 1, -2)$ et $\vec{v}_2 = h(0, 0, 1) = (1, 0, 0)$ sont dans $\operatorname{Im} h$. Par ailleurs la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est libre : si l'on suppose que λ_1, λ_2 sont des réels vérifiant $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 = \vec{0}$, on aboutit immédiatement à $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une famille libre maximale dans $\operatorname{Im} h$ (puisque la dimension de $\operatorname{Im} h$ est 2), c'est donc une base de $\operatorname{Im} h$.

4. Soit $\vec{v} \in \operatorname{Ker} h \cap \operatorname{Im} h$. On sait par la question 2 qu'il existe α réel tel que $\vec{v} = \alpha\vec{w}$, et par la question 3 qu'il exsite β, γ réels tels que $\vec{v} = \beta\vec{v}_1 + \gamma\vec{v}_2$. On en tire

$$(\alpha, \alpha, 0) = (\gamma, \beta, -2\beta).$$

Cela implique $\beta = 0$, puis $\alpha = \beta = 0$. On a donc $\vec{v} = 0$. On a montré que $\operatorname{Ker} h \cap \operatorname{Im} h \subset \{\vec{0}\}$, et donc $\operatorname{Ker} h \cap \operatorname{Im} h = \{\vec{0}\}$ puisque l'inclusion inverse est trivialement satisfaite. Par ailleurs, puisque $\dim(\operatorname{Ker} h) + \dim(\operatorname{Im} h) = 3$, nous pouvons conclure que $\mathbf{R}^3 = \operatorname{Ker} h \oplus \operatorname{Im} h$.

Exercice 2

1. Soit $P \in \operatorname{Ker}(f)$. Alors $P(-1) = P(0) = P(1) = 0$. Ainsi les réels $-1, 0$ et 1 sont des racines de P, et donc (puisque ces racines sont distinctes) P est divisible par le polynôme $Q(X) = X(X-1)(X+1) = X^3 - X$. Il existe donc un polynôme R tel que $P = QR$. On écrit

$$3 + \deg(R) = \deg(Q) + \deg(R) = \deg(QR) = \deg P \leqslant 3$$

pour conclure que $\deg R \leqslant 0$, et donc R est un polynôme constant. Ainsi tout élément de $\operatorname{Ker} f$ est multiple de Q. Réciproquement, $Q \in \operatorname{Ker} f$, et donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\{Q\}$ a dimension 1, et f n'est pas injective. On applique ensuite le théorème du rang

$$4 = \dim \mathbf{R}_3[X] = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f).$$

Puisque $\operatorname{Ker} f$ est de dimension 1, on en déduit que $\operatorname{Im} f$ est de dimension 3. Le seul sous-espace de $\mathbf{R}^3$ de dimension 3 est $\mathbf{R}^3$, donc $\operatorname{Im} f = \mathbf{R}^3$: f est surjective.

2. Montrons que $\operatorname{Im} g = \mathbf{R}_2[X]$, l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Si $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbf{R}_3[X]$, alors $g(P)(X) = P'(X) = 3aX^2 + 2bX + c \in \mathbf{R}_2[X]$. Réciproquement, si $R(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ est un élément de $\mathbf{R}_2[X]$, alors le polynôme $P(X) = \frac{\alpha}{3}X^3 + \frac{\beta}{2}X^2 + \gamma X$ est un élément de $\mathbf{R}_3[X]$ tel que $g(P) = R$. On a donc montré $\operatorname{Im} g = \mathbf{R}_2[X]$. En particulier, $\operatorname{Im} g$ est de dimension 3.

   Soit maintenant S un élément de $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g$. Au vu de ce qui précèdre, S est un multiple de $X^3 - X$ qui est de de degré inférieur ou égal à 2. La seule possibilité est alors $S = 0$. Récipoquement, le polynôme nul est dans $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g$. On a donc $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$. Puisque $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} g) = 1 + 3 = \dim \mathbf{R}_3[X]$, on a bien $\mathbf{R}_3[X] = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$.

Exercice 3

1. On intégre par parties en choisissant $u(x) = \ln(x)$, $u'(x) = 1/x$, $v'(x) = 1/(x+1)^2$ et $v(x) = -1/(x+1)$. On a alors

$$\int f(x)dx = -\frac{\ln(x)}{(x+1)} + \int \frac{1}{x(x+1)}dx = -\frac{\ln(x)}{(x+1)} + \int \frac{x+1-x}{x(x+1)}dx = -\frac{\ln(x)}{(x+1)} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx.$$

$$\int f(x)dx = -\frac{\ln(x)}{(x+1)} + \ln(x) - \ln(x+1) + C = \frac{x\ln(x)}{(x+1)} - \ln(x+1) + C$$

   où C est une constante. Si on veut la condition $F(1) = 0$, cela impose $C = \ln 2$.

2. On effectue la décomposition en éléments simples en commençant par remarquer que $x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)$. Il existe des réels α, β tels que

$$G(x) = \frac{x+2}{(x-1)(x+4)} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+4}.$$

   On a

$$\alpha = \lim_{x\to 1}(x-1)G(x) = \frac{3}{5}, \beta = \lim_{x\to -4}(x+1)G(x) = \frac{2}{5}.$$

   Ainsi

$$\int G(x)dx = \int \left(\frac{3}{5}\frac{1}{x-1} + \frac{2}{5}\frac{1}{x+4}\right) dx = \frac{3}{5}\ln|x-1| + \frac{2}{5}\ln|x+4| + C$$

   où C est une constante, cette expression étant valable sur l'un des intervalles $]-\infty, -4[$, $]-4, 1[$ ou $]1, +\infty[$.

3. On effectue le changement de variable $y = \exp(x) \iff x = \log(y)$. La fonction $x \mapsto \exp x$ est une bijection de $]0,1[$ sur $]1,e[$, qui est de classe C^1 ainsi que sa réciproque. On a donc $dy \leftrightarrow \exp(x)dx$, et

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int_1^e \frac{1}{1+y^2}dy = [\arctan y]_1^e = \arctan(e) - \frac{\pi}{4}.$$

4. La fonction $x \mapsto 1/x$ est une bijection de $]1/2, 2[$ sur $]1/2, 2[$ qui est sa propre réciproque, et elle est de classe C^1. Le changement de variable donne ($dx \leftrightarrow -du/u^2$)

$$I = \int_2^{1/2} \frac{1+u^2}{-u^2}\arctan(1/u)du = \int_{1/2}^2 \left(1 + \frac{1}{u^2}\right)\arctan(1/u)du.$$

   On utilise l'indication :

$$I = \int_{1/2}^2 \left(1 + \frac{1}{u^2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(u)du\right) = \frac{\pi}{2}\int_{1/2}^2 \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du - I.$$

   On en déduit

$$2I = \frac{\pi}{2}\left[u - \frac{1}{u}\right]_{1/2}^2 du = \frac{3\pi}{2}$$

   et donc $I = 3\pi/4$.

   Question subsidiaire : Une solution est de dériver la fonction $\phi : u \to \arctan(u) + \arctan(1/u)$ sur $]0, \infty[$

$$\phi'(u) = \frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{u^2}\frac{1}{1+1/u^2} = 0.$$

Ainsi ϕ est constante sur $]0, \infty[$, et vaut $\phi(\pi/4) = 2\arctan(1) = \pi/2$.