Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2013-2014

Math I - CPGEI

Devoir n° 4

PROBLÈME

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

1. On note (E) l'équation en $z \in \mathbf{C}$, $z^5 - 1 = 0$.
   (a) Résoudre (E). Les solutions seront données sous forme exponentielle.
   (b) i. Déterminer un polynôme Q de degré 4 tel que, pour tout $z \in \mathbf{C}$,
   $$z^5 - 1 = (z-1)Q(z)\,.$$
   ii. Montrer que :
   $$\forall z \in \mathbf{C}^\star,\ \left(Q(z) = 0 \iff \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = 0\right).$$
   iii. Résoudre en $\zeta \in \mathbf{C}$, l'équation $\zeta^2 + \zeta - 1 = 0$.
   iv. En déduire l'ensemble des solutions $z \in \mathbf{C}$ de l'équation $Q(z) = 0$.
   v. Donner les solutions de (E) sous forme algébrique.
   (c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\sin\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{5}$ et $\sin\frac{4\pi}{5}$.
   (d) En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{5}$.

2. Soit $(a,h) \in \mathbf{R}^2$ et $n \in \mathbf{N}^\star$. On pose
   $$C(a,h,n) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kh) \qquad \text{et} \qquad S(a,h,n) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a+kh).$$
   (a) Montrer que $\sin\frac{h}{2} = 0$ si et seulement si $e^{ih} = 1$.
   (b) On suppose que $\sin\frac{h}{2} = 0$. Calculer $C(a,h,n)$ et $S(a,h,n)$ en fonction de a et de $n \in \mathbf{N}^\star$.
   (c) On suppose que $\sin\frac{h}{2} \neq 0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,
   $$C(a,h,n) = \frac{\sin\frac{nh}{2} \times \cos\left[a + \frac{(n-1)h}{2}\right]}{\sin\frac{h}{2}} \quad \text{et} \quad S(a,h,n) = \frac{\sin\frac{nh}{2} \times \sin\left[a + \frac{(n-1)h}{2}\right]}{\sin\frac{h}{2}}\ .$$

3. Notons $\theta = \dfrac{\pi}{17}$. On introduit

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta + \cos 11\theta \ ; \\ x_2 &= \cos \theta + \cos 9\theta + \cos 13\theta + \cos 15\theta. \end{aligned}$$

   (a) i. Déterminer $(a, h, n) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{N}^*$ tel que $x_1 + x_2 = C(a, h, n)$.

   ii. En déduire $x_1 + x_2$.

   (b) On admet dans cette question que $x_1 x_2 = -1$ et $x_1 > 0$.

   i. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{C}$, on a $x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = (x - x_1)(x - x_2)$.

   ii. En déduire les valeurs exactes de x_1 et x_2.

   (c) L'objectif de cette question est de démontrer qu'effectivement $x_1 > 0$.

   i. Justifier que $\cos 5\theta > \cos 6\theta$.

   ii. En déduire que $\cos 5\theta + \cos 11\theta > 0$.

   iii. Étudier le signe de $\cos 3\theta$ et $\cos 7\theta$.

   iv. En déduire que $x_1 > 0$.

Avec un peu de persévérance et plus de temps, on peut démontrer que :

$$\cos\theta = \frac{1}{16}\left(1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2\sqrt{680 + 152\sqrt{17}}}\right).$$