Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2013-2014

Math I - CPGEI

Devoir n° 4

PARTIE COMMUNE - CORRECTION

Exercice 1.

1. $2i = 2e^{i\pi/2} = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^2 = \left[\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^2 = (1+i)^2$.
2. Notons Δ le discriminant de l'équation $w^2 + (-1+i)w - i = 0$, alors $\Delta = (-1+i)^2 + 4i = 2i$. D'après la question 1, les racines carrées de ce discriminant sont $1+i$ et $-1-i$, on en déduit que :
$$w^2 + (-1+i)w - i = 0 \iff w = \frac{1-i+1+i}{2} = 1 \text{ ou } w = \frac{1-i-1-i}{2} = -i$$
L'ensemble des solutions de l'équation $w^2 + (-1+i)w - i = 0$ est donc $\{\ 1\ ,\ -i\ \}$.
3. D'après la question précédente, on a :
$$z^4 + (-1+i)z^2 - i = 0 \iff z^2 = 1 \text{ ou } z^2 = -i\ .$$
Or $-i = e^{i\pi}\, e^{i\pi/2} = \left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$, ainsi :
$$z^4 + (-1+i)z - i = 0 \iff (z = 1 \text{ ou } z = -1) \text{ ou } \left(z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } z = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$
L'ensemble des solutions de cette équation est donc :
$$\left\{\ 1,\ -1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\ \right\}.$$

Exercice 2.

1. (a) $f(1) = 1 \iff \dfrac{\beta}{1 + \frac{1}{1+1}} = 1 \iff \beta = 1 + \dfrac{1}{2} \iff \beta = \dfrac{3}{2}$.

   (b) $f(0) = \gamma$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \gamma$.

   De plus, comme $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^\alpha + 1} = 1$, d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\beta}{1 + \frac{1}{x^\alpha+1}} = \dfrac{\beta}{2}$.
$$f \text{ est continue en } 0 \iff f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \iff \gamma = \frac{\beta}{2}.$$

   (c) f est constante égale à $\frac{3}{2}$ sur $]-\infty, 0]$, elle est donc dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$. Soit $x > 0$, alors :
$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{3}{2(1 + \frac{1}{x^\alpha+1})} - \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4x}\left(\frac{2(x^\alpha+1)}{x^\alpha+2} - 1\right) = \frac{3}{4}\,\frac{x^{\alpha-1}}{x^\alpha+2}.$$
   Comme $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to 0}(x^\alpha + 2) = 2$, on en déduit que :
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ 3/8 & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}.$$
   Par conséquent, f est dérivable en 0 si et seulement si $\alpha \in]1, +\infty[$.

2. Remarquons que, pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{3}{2}\frac{x^2+1}{x^2+2}$.
   (a) f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}$,
   $$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{(x^2+2)^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
   Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) \geq 0$, donc f est croissante sur $\mathbf{R}$.
   (b) Soit $x \in]-\infty, 0]$, alors $f(x) = \frac{3}{4}$, donc $f(x) - x = \frac{3}{4} - x$.
   Soit $x > 0$,
   $$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{\frac{3}{2}(x^2+1) - x(x^2+2)}{x^2+2} = \frac{-x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}}{x^2+2} \\ &= \frac{(1-x)(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2})}{x^2+2} = \frac{(1-x)\left[(x-\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16} + \frac{3}{2}\right]}{x^2+2} \\ &= \frac{(1-x)\left[(x-\frac{1}{4})^2 + \frac{23}{16}\right]}{x^2+2}. \end{aligned}$$
   (c) Soit $x \in \mathbf{R}$,
   $$\begin{aligned} f(x) = x &\iff f(x) - x = 0 \\ &\iff \left(\frac{3}{4} - x = 0 \text{ et } x \leq 0\right) \text{ ou } \left(\frac{(1-x)\left[(x-\frac{1}{4})^2 + \frac{23}{16}\right]}{x^2+2} = 0 \text{ et } x > 0\right) \\ &\iff \frac{(1-x)\left[(x-\frac{1}{4})^2 + \frac{23}{16}\right]}{x^2+2} = 0 \text{ et } x > 0. \end{aligned}$$
   Or, $x^2 + 2 > 0$ et $(x - \frac{1}{4})^2 + \frac{23}{16} > 0$, d'où :
   $$f(x) = x \iff 1 - x = 0 \text{ et } x > 0 \iff x = 1.$$
   Donc 1 est l'unique point fixe de f.
3. (a)
   $$\begin{aligned} u_0 \leq u_1 &\iff u_0 \leq f(u_0) \iff f(a) - a \geq 0 \\ &\iff \begin{cases} \dfrac{(1-a)\left[(a-\frac{1}{4})^2 + \frac{23}{16}\right]}{a^2+2} \geq 0 & \text{si } a > 0 \\ \frac{3}{4} - a \geq 0 & \text{si } a \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - a \geq 0 & \text{si } a > 0 \\ \frac{3}{4} \geq a & \text{si } a \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$
   car $\dfrac{\left[(a-\frac{1}{4})^2 + \frac{23}{16}\right]}{a^2+2} \geq 0$, ainsi :
   $$u_0 \leq u_1 \iff 0 < a \leq 1 \text{ ou } a \geq 0 \iff a \leq 1.$$
   (b) • Supposons que $a \leq 1$, montrons par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.
   D'après la question précédente, comme $a \geq 1$, on a $u_0 \leq u_1$.
   Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $u_n \leq u_{n+1}$. Or f est croissante, donc $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, c'est-à-dire que $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.
   On a démontré que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.
   • Supposons que $a > 1$, alors, d'après la question précédente, $u_0 > u_1$. On peut donc démontrer par récurrence, comme dans le cas précédent, que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.

(c) On a : $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geq 0$.
De plus, si $x \leq 0$, $f(x) = \frac{3}{4}$ et si $x > 0$, $f(x) = \frac{3}{2}\frac{x^2+1}{x^2+2} \leq \frac{3}{2}$.
Donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $0 \leq f(x) \leq \frac{3}{2}$. On en déduit que :

$$\forall n \geq 1,\ 0 \leq u_n \leq \frac{3}{2}.$$

Si $a \leq 1$, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et majorée, donc elle converge.
Si $a > 1$, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et minorée, donc elle converge également.
Notons $\ell \in \mathbf{R}$ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, comme f est continue, en passant à la limite dans cette égalité, on obtient : $\ell = f(\ell)$. Ainsi, ℓ est un point fixe de f, mais 1 est l'unique point fixe de f, par conséquent $\ell = 1$.

Exercice 3.

1. Faux : considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = (-n)_{n\in\mathbf{N}}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = -1 \quad \text{et} \quad u_n \leq 0.$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et majorée par 0, mais elle diverge vers $-\infty$.

2. Faux : considérons $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto |x|$. f est continue sur $\mathbf{R}$, mais elle n'est pas dérivable en 0, en effet, soit $x \in \mathbf{R}^\star$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases},\ \text{d'où} \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -1 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 1.$$

Ainsi, $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0.

3. Faux : considérons $f : \mathbf{R}^\star \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. f est dérivable sur $\mathbf{R}^\star$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}^\star$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \ \leq\ 0.$$

Mais f n'est pas décroissante sur $\mathbf{R}^\star$ car $-1 < 1$ et $f(-1) < f(1)$ ($f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$).

4. Faux : $2\,\mathrm{Im}(i) = 2$ et $i - \bar{i} = 2i$, d'où $2\,\mathrm{Im}(i) \neq i - \bar{i}$.

5. Vrai : Soit $(z_1, z_2) \in (\mathbf{C}^\star)^2$ tel que $f(z_1) = f(z_2)$ d'où $|z_1| = |z_2|$ et $\frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|}$.
Ainsi $z_1 = z_2$, donc f est injective.

6. Faux : soit $(1, 2i) \in \mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{C}^\star$. Supposons qu'il existe $z \in \mathbf{C}^\star$ tel que $f(z) = (1, 2i)$, alors $|z| = 1$ et $\frac{z}{|z|} = 2i$, d'où $z = 2i$ et donc $|z| = 2$, ce qui est absurde puisque $|z| = 1$.
Donc f n'est pas surjective.