Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

I

Problème :

1. **(a)** Soit $a>0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\chi_{d,a}(x) = \chi\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq \frac{x}{a} \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et, comme $a>0$, on a :

$$-1 \leq \frac{x}{a} \leq 1 \iff -a \leq x \leq a.$$

D'où

$$\boxed{\begin{aligned} \chi_{d,a} :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}}$$

(b) Soit $h \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\chi_{t,h}(x) = \chi(x+h) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x+h \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $(-1 \leq x+h \leq 1) \iff -h-1 \leq x \leq -h+1$.

D'où

$$\begin{aligned} \chi_{t,h} :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } -h-1 \leq x \leq -h+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x \leq 0$, on a : $\Phi(x) = 0 \in [0,1]$

Sinon $x > 0$ donc $\frac{1}{x} > 0$

puis $-\frac{1}{x} < 0$

d'où $\Phi(x) = e^{-\frac{1}{x}} \in]0,1[$.

Dans tous les cas, $\Phi(x) \in [0,1]$.

D'où $\Phi(\mathbb{R}) \subset [0,1]$.

(b) • Sur l'intervalle ouvert $]-\infty, 0[$,

Φ est dérivable avec $\forall x \in]-\infty,0[, \ \Phi'(x) = 0$.

En effet, $\forall x \in]-\infty, 0[, \ \Phi(x) = 0$.

• Sur l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$,

Φ est dérivable avec $\forall x \in]0,+\infty[, \ \Phi'(x) = e^{-\frac{1}{x}} \times \frac{1}{x^2}$.

En effet : $\forall x \in]0,+\infty[, \ \Phi(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.

~~Par ailleurs, Φ est dérivable à gauche en 0, de dérivée à gauche 0, car $\forall x \in]-\infty,0[, \ \Phi(x) = 0$.~~

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

II

• Pour tout $x < 0$, on a :

$$\frac{\Phi(x) - \Phi(0)}{x - 0} = 0 \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$$

Et pour tout $x > 0$, on a :

$$\frac{\Phi(x) - \Phi(0)}{x - 0} = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$

car $\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$

et $\lim\limits_{y \to +\infty} y e^{-y} = 0$.

D'où $\lim\limits_{x \to 0, x \neq 0} \frac{\Phi(x) - \Phi(0)}{x - 0} = 0$.

Φ est dérivable en 0, de dérivée 0.

Φ est donc dérivable et

$$\Phi' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Φ' est continue en tout point des intervalles ouverts $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Par ailleurs on a :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \Phi'(x) = 0.$$

Or, pour $x > 0$, on a :

$$\Phi'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x}\right)^2 e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\xrightarrow[x \to 0^+]{} 0 \cancel{= \Phi'(0)}$$

car $\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$

et $\lim_{y \to +\infty} y^2 e^{-y} = 0$.

D'où $\lim_{x \to 0} \Phi'(x) = 0 = \Phi'(0)$.

Φ' est continue

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geq 1$.

Alors $x^2 \geq 1$ donc $1 - x^2 \leq 0$

d'où $\Psi(x) = \Phi(1 - x^2) = 0$.

(b) Comme Ψ est continue en 0

car Φ est continue en 1,

de $\lim_{a \to +\infty} \frac{x}{a} = 0$

on déduit $\lim_{a \to +\infty} \Psi\left(\frac{x}{a}\right) = \Psi(0) = \Phi(1)$
$= e^{-1}$.

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

D'où

$$\boxed{\lim_{a \to +\infty} \Psi_{d,a}(x) = e^{-1}}.$$

Par ailleurs, d'après la question précédente on a :

$$\lim_{+\infty} \Psi = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{-\infty} \Psi = 0.$$

Or : - si $x > 0$, alors $\lim_{a \to 0^+} \frac{x}{a} = +\infty$

- si $x < 0$, alors $\lim_{a \to 0^+} \frac{x}{a} = -\infty$

- et si $x = 0$, alors ~~$\lim_{a \to 0^+} \frac{x}{a} = 0$~~.

on a : $\forall a > 0, \ \frac{x}{a} = 0$.

D'où

$$\lim_{a \to 0^+} \Psi_{d,a}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \\ \Psi(0) = e^{-1} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{a \to 0^+} \Psi_{d,a}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ e^{-1} & \text{sinon} \end{cases}}.$$

(c) Ψ est continue en x car Φ l'est en $1-x^2$ donc

de $\lim\limits_{h \to 0^+} (x+h) = x$

on déduit $\boxed{\lim\limits_{h \to 0^+} \Psi_{t,h}(x) = \Psi(x)}$.

Comme $\lim\limits_{+\infty} \Psi = 0$,

de $\lim\limits_{h \to +\infty} (x+h) = +\infty$

on déduit $\boxed{\lim\limits_{h \to +\infty} \Psi_{t,h}(x) = 0}$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $j \in [\![-n, n]\!]$.

Alors $-1 \leqslant \frac{-1}{n} = \frac{-n}{n^2} \leqslant \frac{-j}{n^2} \leqslant \frac{-(-n)}{n^2} = \frac{1}{n} \leqslant 1$

donc $x_0 + \left(\frac{-j}{n^2}\right) \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$.

D'où

$$\left| f_{t,-\frac{j}{n^2}}(x_0) - f(x_0) \right| = \left| f\left(x_0 - \frac{j}{n^2}\right) - f(x_0) \right|$$

$$\leqslant K \left| x_0 - \left(x_0 - \frac{j}{n^2}\right) \right| = \frac{K|j|}{n^2}$$

$$\leqslant \frac{K n}{n^2} = \frac{K}{n}.$$

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

IV

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors

$$\left| f_n(x_0) - f(x_0) \frac{I_n}{I} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{I} \frac{1}{n} \sum_{j=-n}^{n} \left(f_{t,-\frac{j}{n^2}}(x_0) - f(x_0) \right) \Psi_{d,\frac{1}{n}}\left(\frac{j}{n^2}\right) \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{I} \frac{1}{n} \sum_{j=-n}^{n} \left| f_{t,-\frac{j}{n^2}}(x_0) - f(x_0) \right| \Psi_{d,\frac{1}{n}}\left(\frac{j}{n^2}\right)$$

car $\forall j \in [\![-n, n]\!], \ \Psi_{d,\frac{1}{n}}\left(\frac{j}{n^2}\right) \geqslant 0$

puisque $\Psi_{d,\frac{1}{n}}(\mathbb{R}) \subset \Psi(\mathbb{R}) \subset \Phi(\mathbb{R}) \subset [0,1]$

D'où

$$\left| f_n(x_0) - f(x_0) \frac{I_n}{I} \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{I} \frac{1}{n} \sum_{j=-n}^{n} \frac{K}{n} \Psi_{d,\frac{1}{n}}\left(\frac{j}{n^2}\right)$$

$$= \frac{K}{n I} I_n .$$

(c) Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{I_n}{I} = 1$,

on déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(f(x_0) \frac{I_n}{I} \right) = f(x_0)$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(f_n(x_0) - f(x_0) \frac{I_n}{I} \right) = 0$

D'où $\lim_{n \to +\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$.

(d). Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $n = kq$.

Alors

$$f_n(x_0) = \frac{1}{I} \frac{1}{n} \sum_{j=-n}^{n} f\left(\frac{p}{q} - \frac{j}{n^2}\right) \Psi_{d,\frac{1}{n}}\left(\frac{j}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{I} \frac{1}{n} \sum_{j=-n}^{n} f\left(\frac{pkn - j}{n^2}\right) \Psi_{d,\frac{1}{n}}\left(\frac{j}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{I} \frac{1}{n} \sum_{l=pkn-n}^{pkn+n} f\left(\frac{l}{n^2}\right) \Psi_{d,\frac{1}{n}}\left(\frac{pkn - l}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{I} \frac{1}{n} \sum_{l=pkn-n}^{pkn+n} f\left(\frac{l}{n^2}\right) \Psi_{d,\frac{1}{n}}\left(\frac{p}{q} - \frac{l}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{I} \frac{1}{n} \sum_{l=pkn-n}^{pkn+n} f\left(\frac{l}{n^2}\right) \Psi_{d,\frac{1}{n}}\left(x_0 - \frac{l}{n^2}\right).$$