Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2013-2014

Math I - CPGEI

Devoir n$^{\text{o}}$ 3

PROBLÈME

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

On rappelle que pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\lim_{y \to +\infty} y^\alpha \, e^{-y} \; = \; 0 \, .$$

Pour toute fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, on définit pour $a > 0$

$$f_{d,a} : \; \mathbf{R} \to \mathbf{R} \, , \quad x \mapsto f\left(\frac{x}{a}\right)$$

et pour $h \in \mathbf{R}$

$$f_{t,h} : \; \mathbf{R} \to \mathbf{R} \, , \quad x \mapsto f\left(x + h\right) \, .$$

1. On considère

$$\chi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

   (a) Écrire explicitement $\chi_{d,a}$ pour tout $a > 0$.

   (b) Écrire explicitement $\chi_{t,h}$ pour tout $h \in \mathbf{R}$.

2. On considère

$$\Phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{sinon} \end{cases} .$$

   (a) Montrer que $\Phi(\mathbf{R}) \subset [0, 1]$.

   (b) Montrer que Φ est dérivable et que sa dérivée est continue.

3. On introduit

$$\Psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \Phi(1 - x^2) \, .$$

   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a : $\Psi(x) = 0$ si $|x| \geq 1$.

(b) Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrer que les limites suivantes existent et les calculer

$$\lim_{a \to 0^+} \Psi_{d,a}(x) \quad \text{et} \quad \lim_{a \to +\infty} \Psi_{d,a}(x)\,.$$

(c) Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrer que les limites suivantes existent et les calculer

$$\lim_{h \to 0^+} \Psi_{t,h}(x) \quad \text{et} \quad \lim_{h \to +\infty} \Psi_{t,h}(x)\,.$$

4. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on définit

$$I_n \;=\; \frac{1}{n} \sum_{j=-n}^{n} \Psi_{d,\frac{1}{n}}\left(\frac{j}{n^2}\right)\,.$$

On admettra que $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$ possède une limite strictement positive $I > 0$.
On se donne $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$ et $K > 0$ tels que

$$\forall y \in [x_0 - 1, x_0 + 1], \quad |f(y) - f(x_0)| \;\leq\; K\,|x_0 - y|\,.$$

Alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on définit

$$f_n(x_0) \;=\; \frac{1}{I}\,\frac{1}{n} \sum_{j=-n}^{n} f_{t,-\frac{j}{n^2}}(x_0)\,\Psi_{d,\frac{1}{n}}\left(\frac{j}{n^2}\right)\,.$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $j \in [\![-n, n]\!]$ on a : $|f_{t,-\frac{j}{n^2}}(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{K}{n}$.

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\left| f_n(x_0) \;-\; \frac{I_n}{I}\,f(x_0) \right| \;\leq\; \frac{K}{n}\,\frac{I_n}{I}$$

(c) Conclure que

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x_0) \;=\; f(x_0)\,.$$

(d) On suppose maintenant que $x_0 \in \mathbf{Q}$ et l'on se donne $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ tel que $x_0 = \frac{p}{q}$.
Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, avec $n = kq$, on a :

$$f_n(x_0) \;=\; \frac{1}{I}\,\frac{1}{n} \sum_{l=pkn-n}^{pkn+n} f\left(\frac{l}{n^2}\right)\,\Psi_{d,\frac{1}{n}}\left(x_0 - \frac{l}{n^2}\right)\,.$$