Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2013-2014

Math I - CPGEI

Devoir n° 3

Partie commune

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ définie par $u_1 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$u_{n+1} \;=\; \frac{nu_n + 3(n+2)}{2(n+1)}.$$

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est majorée par 3.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ converge.
4. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$.

Exercice 2. Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x| < 1$.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$u_{n+1} \;=\; x\,u_n + 1.$$

1. Justifier qu'il existe un unique $a \in \mathbf{R}$ tel que $a = x\,a + 1$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers a.
3. Calculer u_1, u_2 et u_3.
4. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, exprimer u_n comme la somme d'une suite géométrique.

Exercice 3. On considère la fonction $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^3 + 3x^2 + 5x + 5}{(x+1)^2}$.
On notera Γ le graphe de f.

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Montrer que Γ admet la droite $\mathscr{D} = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x + 1 \,\}$ pour asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Étudier la position relative de $\mathscr{D}$ par rapport à Γ.

Exercice 4. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. L'ensemble $\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; 4y \leq x \leq y \text{ et } 2y \leq x \leq 3y \right\}$ est non vide.
2. Pour toute paire d'ensembles (E, F) et toute fonction fonction $f : E \to F$, toute paire $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ de parties de E vérifie $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
3. L'ensemble $\left\{ x + \frac{1}{x} \;\middle|\; x \in \mathbf{R}_+^* \right\}$ admet 2 pour minimum.
4. Le graphe de $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2 + 3x + 3$ admet la droite $\mathscr{D} = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x + 2 \}$ pour tangente au point $(-1, g(-1))$.
5. Tout nombre complexe $z \in \mathbf{C}$ vérifie $\mathrm{Re}(z^2) \geq 0$.
6. Tout nombre complexe $z \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Re}\, z \geq 0$ vérifie $|z + 1| \geq |z - 1|$.