Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2012-2013
Cursus préparatoire, semestre 2

Devoir en classe numéro 3
PARTIE COMMUNE. DURÉE : 1H30

Exercice 1
Soient a et b deux nombres réels, et P le polynôme

$$P(X) = X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 1.$$

1. Écrire $X^2 + 1$ comme un produit de facteurs irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que le polynôme $X^2 + 1$ divise P dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 2
Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme de degré au moins 1, et $Q = P + 1$. Soient également r et s deux entiers strictement positifs.

1. Montrer que P et Q sont premiers entre eux.
2. Montrer que $X + 1$ divise $X^{2r} - 1$.
3. Soit $R = P^{2r} + Q^s - 1$. Montrer que R est divisible par P et par Q.
4. Montrer que R est divisible par PQ.
5. Application : soit le polynôme $S(X) = X^4 + 4X^3 + 7X^2 + 8X + 4$.
   (a) Montrer qu'il existe des réels a, b, c tels que $S(X) = (X + a)^4 + (X + b)^2 + c$.
   (b) A l'aide des questions 3 et 4, et en déduire une factorisation de S dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 3
Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}(X)$ la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X + 1}{X^4 - X}.$$

Exercice 4
Soit la fraction rationnelle $G(X) = \dfrac{1}{(X - 1)(X - 2)}$

1. Donner la décomposition en éléments simples de G sur $\mathbf{R}(X)$.
2. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto G(x)$.

Exercice 5
Montrer que les inégalités suivantes sont vraies pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$