Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2012-2013
Cursus préparatoire, semestre 2

Devoir en classe numéro 3 — correction

Exercice 1

1. On a $X^2+1=(X-i)(X+i)$.
2. Si X^2+1 divise P dans $\mathbf{R}[X]$, alors $X-i$ et $X+i$ divisent P dans $\mathbf{C}[X]$, et donc $P(i)=P(-i)=0$. Ces équations s'écrivent $(2-a)+(b-1)i=0$ et $(2-a)-(b-1)i=0$, d'où on tire $a=2$ et $b=1$. Réciproquement, pour ces choix de a et b, les polynômes $X-i$ et $X+i$ divisent P dans $\mathbf{C}[X]$. Comme $X-i$ et $X+i$ sont premiers entre eux, on en déduit que leur produit divise P dans $\mathbf{C}[X]$. Ainsi, il existe $Q\in\mathbf{C}[X]$ tel que $P(X)=(X^2+1)Q(X)$. Enfin, puisque P est égal à son propre conjugué, on en déduit $(X^2+1)Q(X)=(X^2+1)\overline{Q}(X)$, donc $Q=\overline{Q}$, ce qui implique que Q est à coefficients réels.

Exercice 2

1. Si un polynôme divise P et Q, il divise leur différence, qui est un polynôme constant. Ainsi les seuls diviseurs communs de P et Q sont les polynômes constants : P et Q sont premiers entre eux.
2. Comme le polynôme $X^{2r}-1$ admet -1 comme racine, il est divisible par $X+1$.
3. Le polynôme P divise P^{2r} puisque $r\geqslant 1$. De plus, la formule $Q^s-1=(Q-1)(Q^{s-1}+Q^{s-2}+\cdots+1)$ montre que $P=Q-1$ divise Q^s-1. On en déduit que P divise R.
   De même, le polynôme Q divise Q^s puisque $s\geqslant 1$. Ensuite, d'après la question précédente, il existe un polynôme V tel que $X^{2r}-1=(X+1)V(X)$, et donc $P^{2r}-1=(P+1)V(P)$, ce qui montre que $Q=P+1$ divise $P^{2r}-1$. Par conséquent, Q divise R.
4. Comme P divise R, il existe un polynôme W tel que $R=PW$. Ainsi Q divise PW. Comme Q et P sont premiers entre eux, le lemme de Gauss implique que Q divise W, et donc PQ divise $PW=R$.
5. Application : soit le polynôme $S(X)=X^4+4X^3+7X^2+8X+4$.
   (a) La comparaison des coefficients de X^3 donne $a=1$. En soustrayant $(X+1)^4=X^4+3X^3+6X^2+4X+1$ des deux membmres, on obtient $(X+b)^2+c=X^2+4X+3$, d'où on tire $b=2$ et $c=-1$.
   (b) Soit $P(X)=X+1$ et $Q(X)=X+2$. On a écrit à la question précédente $S(X)=P(X)^4+Q(X)^2-1$. D'après la question 4, le polynôme S est divisible par PQ. On effectue la division euclidienne pour obtenir
   $$S(X)=(X+1)(X+2)(X^2+X+2).$$
   Le discrimant du trinôme X^2+X+2 est négatif, et donc c'est un polynôme irréductible sur $\mathbf{R}[X]$. On a bien écrit la factorisation recherchée.

Exercice 3

On commence par factoriser le dénominateur : $X^4-X=X(X^3-1)=X(X-1)(X^2+X+1)$. Les trois facteurs que l'on a identifiés sont irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$, et donc la décomposition en éléments simples de $F(X)$ a pour forme
$$F(X)=\frac{a}{X}+\frac{b}{X-1}+\frac{cX+d}{X^2+X+1},$$
où les réels a,b,c,d sont à déterminer. On écrit par exemple
$$a=\lim_{X\to 0}XF(X)=\lim_{X\to 0}\frac{X+1}{X^3-1}=-1.$$

$$b = \lim_{X\to 1}(X-1)F(X) = \lim_{X\to 1}\frac{X+1}{X(X^2+X+1)} = 2/3$$

On obtient une autre relation en remarquant que de $XF(X)$ tend vers 0 en $+\infty$, d'où

$$0 = \lim_{X\to\infty} XF(X) = a+b+c.$$

Enfin, on peut calculer par exemple

$$0 = F(-1) = -a - b/2 - c + d.$$

Les valeurs obtenues sont $a=-1, b=2/3, c=1/3$ et $d=-1/3$, et donc

$$F(X) = -\frac{1}{X} + \frac{2}{3(X-1)} + \frac{X-1}{3(X^2+X+1)}.$$

Exercice 4

1. $$G(X) = \frac{1}{(X-1)(X-2)} = \frac{(X-1)-(X-2)}{(X-1)(X-2)} = \frac{1}{X-2} - \frac{1}{X-1}$$

2. On utilise la question précédente pour simplifier les calculs. On a au voisinage de 0

$$\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x} = -1 - x - x^2 - x^3 + o(x^3),$$

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-x/2} = -\frac{1}{2}(1+(x/2)+(x/2)^2+(x/2)^3+o(x^3)) = -1/2-x/4-x^2/8-x^3/16+o(x^3).$$

Par soustraction, on en déduit

$$G(x) = 1/2 + 3x/4 + 7x^2/8 + 15x^3/16 + o(x^3)$$

Exercice 5

Comme la fonction sinus est de classe C^∞, on peut lui appliquer le théorème de Taylor–Lagrange avec le reste à l'ordre que l'on souhaite. Soit $x \in [0,\pi]$. Écrivons d'abord la formule avec reste à l'ordre 4 : il existe $c \in [0,\pi]$ tel que

$$\sin(x) = x - x^3/6 + \sin^{(4)}(c)x^4/4!.$$

On a $\sin^{(4)} = \sin$, et puisque $c \in [0,\pi]$, $\sin(c) \geqslant 0$, et donc $\sin(x) \geqslant x - x^3/6$. L'autre inégalité s'obtient en écrivant la formule avec reste à l'ordre 6 : il existe $d \in [0,\pi]$ tel que

$$\sin(x) = x - x^3/6 + x^5/120 + \sin^{(6)}(c)x^6/6!.$$

On a $\sin^{(6)} = -\sin$, et puisque $d \in [0,\pi]$, $\sin(d) \geqslant 0$, et donc $\sin(x) \leqslant x - x^3/6 + x^5/120$.