Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

Partie commune :

Exercice 1 :

1. • Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a : $x \in f^{-1}(\{0\}) \Leftrightarrow f(x) \in \{0\}$

$\Leftrightarrow f(x) = 0$.

Or si $x > 0$, alors

$x \in f^{-1}(\{0\}) \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Et si $x \leq 0$, alors

$x \in f^{-1}(\{0\}) \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

D'où $x \in f^{-1}(\{0\}) \Leftrightarrow x \in \{0, 1\}$.

Ainsi $\boxed{f^{-1}(\{0\}) = \{0, 1\}}$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x > 0$, alors

$x \in f^{-1}(\{1\}) \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow 1 - x = 1$

$\Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

Et si $x \leq 0$, alors

$x \in f^{-1}(\{1\}) \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x^3 = 1$

$\Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

D'où $\boxed{f^{-1}(\{1\}) = \emptyset}$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x \leqslant 0$, alors

$x \in f^{-1}(\mathbb{R}_-) \Leftrightarrow f(x) \in \mathbb{R}_-$

$\Leftrightarrow f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x^3 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leq 0$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}_-$.

Et si $x > 0$, alors

$x \in f^{-1}(\mathbb{R}_-) \Leftrightarrow f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 1 - x \leqslant 0$

$\Leftrightarrow x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \in [1, +\infty[$.

D'où $x \in f^{-1}(\mathbb{R}_-) \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$

Ainsi $f^{-1}(\mathbb{R}_-) =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$.

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

2. f n'est pas injective puisque $f(0) = 0 = f(1)$ et $0 \neq 1$.

3. f n'est pas surjective puisqu'on a montré que $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$ donc que $1 \notin f(\mathbb{R})$, alors que $1 \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 :

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$.

Soit $x \in E_a$.

On a : $a \leqslant b$ et $g(x) \geqslant 0$

donc $a\, g(x) \leqslant b\, g(x)$.

D'où $f(x) \leqslant a\, g(x) \leqslant b\, g(x)$

et $x \in E_b$.

Ainsi $E_a \subset E_b$.

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

On a : $\mathrm{Min}(\{a,b\}) \leqslant a$ donc $E_{\mathrm{Min}(\{a,b\})} \subset E_a$

et $\mathrm{Min}(\{a,b\}) \leqslant b$ donc $E_{\mathrm{Min}(\{a,b\})} \subset E_b$.

D'où $E_{Min(\{a,b\})} \subset E_a \cap E_b$.

Par ailleurs $Min(\{a,b\}) \in \{a,b\}$

donc $E_a \cap E_b \subset E_{Min(\{a,b\})}$

car $E_a \cap E_b \subset E_a$ et $E_a \cap E_b \subset E_b$

Ainsi $E_a \cap E_b = E_{Min(\{a,b\})}$.

3. • Soit $x \in \mathbb{R}$

On a : $x \in E_0 \iff f(x) \leq 0 \times g(x)$

$\iff x^2 + 2x + 1 \leq 0$

$\iff (x+1)^2 \leq 0 \iff (x+1)^2 = 0$

$\iff x = -1$.

D'où $\boxed{E_0 = \{-1\}}$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a : $x \in E_1 \iff f(x) \leq 1 \times g(x)$

$\iff x^2 + 2x + 1 \leq x^2 + 1$

$\iff 2x \leq 0 \iff x \leq 0$.

D'où $\boxed{E_1 = \mathbb{R}_-}$.

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a : $x \in E_2 \iff f(x) \leq 2g(x)$

$\iff x^2 + 2x + 1 \leq 2(x^2+1)$

$\iff 0 \leq x^2 - 2x + 1$

$\iff 0 \leq (x-1)^2 \iff x \in \mathbb{R}$.

D'où $\boxed{E_2 = \mathbb{R}}$

Exercice 3 :

1. On a :

$$\boxed{\Delta_1 = \{(1,1)\}}$$

$$\boxed{\Delta_2 = \{(1,1), (1,2), (2,2)\}}$$

et

$$\boxed{\Delta_3 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}}$$

2. Soit $(i,j) \in \Delta_n$.

On a : $j \leq n$ donc $n - j \geq 0$

et $1 + n - j \geq 1$.

On a :

$n-(j-i)-(1+n-j) = i-1$

et $1 \leqslant i$ donc $i-1 \geqslant 0$.

D'où $1+n-j \leqslant n-(j-i)$.

Enfin on a : $i \leqslant j$ donc $j-i \geqslant 0$

et $n-(j-i) \leqslant n$.

D'où $(1+n-j,\ n-(j-i)) \in \Delta_n$.

<u>3.</u> <u>a.</u> Pour $(i,j) \in \Delta_n$, on a :

$1+n-(n-j+i) = 1+j-i$

et

$n-(n-j+i)+1+n-j = n+1-i$

donc $f \circ f((i,j)) = f(f((i,j)))$

$= (1+j-i,\ n+1-i)$.

D'où $\boxed{\begin{array}{rl} f\circ f : & \Delta_n \to \Delta_n \\ & (i,j) \mapsto (1+j-i,\ n+1-i) \end{array}}$

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

4

Pour $(i,j) \in \Delta_n$, on a :

$1 + n - (n+1-i) = i$

et

$n - (n+1-i) + 1 + j - i = j$

donc $f \circ f \circ f((i,j)) = f(f \circ f((i,j)))$

$= (i,j)$.

D'où $\boxed{f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_{\Delta_n}}$

<u>(b)</u> f est bijective d'inverse $f \circ f$

car $f \circ (f \circ f) = f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_{\Delta_n}$

et $(f \circ f) \circ f = f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_{\Delta_n}$.

<u>Exercice 4</u>

<u>1.</u> FAUX.

En effet $2 \in \mathbb{R}^*$ et l'on a : $0 < \frac{1}{2} < 1$

mais pas $0 < 2 < 1$ car $2 \geq 1$.

<u>2.</u> FAUX. 0 n'est pas un minorant

de A puisque $-1 = 0^2 - 1^2 \in A$

et $-1 < 0$.

3. FAUX. 0 n'appartient pas à B car pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|x| < |y|$ on a : $|x|^2 < |y|^2$

donc $y^2 - x^2 > 0$ et $y^2 - x^2 \neq 0$.

4. FAUX. Les fonctions ne sont pas égales car elles n'ont pas le même ensemble de définition.

En effet, $\mathbb{R} \neq \mathbb{R}\setminus\{1\}$ puisque $1 \in \mathbb{R}$ mais $1 \notin \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

5. VRAi.

Soit E un ensemble et $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cap B \neq \emptyset$.

Alors il existe $x \in A \cap B$.

On déduit $x \in A$ car $A \cap B \subset A$

mais $x \notin A \setminus B$ car $x \in B$ puisque $A \cap B \subset B$.

D'où $A \neq A \setminus B$.