Devoir n$^{\text{o}}$ 2

PARTIE COMMUNE

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

Exercice 1. On définit

$$f: \quad \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,, \qquad x \longmapsto \begin{cases} 1-x & \text{si} \quad x>0 \\ x^3 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{1\})$ et $f^{-1}(\mathbf{R}_-)$.
2. f est-elle injective ?
3. f est-elle surjective ?

Exercice 2. Soit E un ensemble et $f : E \to \mathbf{R}$ et $g : E \to \mathbf{R}_+$ deux fonctions. Pour tout $a \in \mathbf{R}$, on définit

$$E_a \;=\; \{\; x \in E \mid f(x) \leq a\,g(x) \;\}\;.$$

1. Montrer que, pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, si $a \leq b$ alors $E_a \subset E_b$.
2. En déduire que, pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, $E_a \cap E_b = E_{\min(\{a,b\})}$.
3. On suppose désormais que $E = \mathbf{R}$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2+2x+1$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$, $x \mapsto x^2+1$. Déterminer E_0, E_1 et E_2.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On pose

$$\Delta_n \;=\; \left\{\; (i,j) \in \mathbf{N}^2 \;\middle|\; 1 \leq i \leq j \leq n \;\right\}\;.$$

1. Écrire explicitement Δ_1, Δ_2 et Δ_3.
2. Montrer que, pour tout $(i,j) \in \Delta_n$, on a : $(1+n-j, n-(j-i)) \in \Delta_n$.
3. On définit alors $f : \Delta_n \to \Delta_n$, $(i,j) \mapsto (1+n-j, n-j+i)$.
   (a) Calculer $f \circ f$ et $f \circ f \circ f$.
   (b) En déduire que f est bijective.

Exercice 4. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. Pour tout réel non nul $x \in \mathbf{R}^*$, sont équivalents $0 < x < 1$ et $0 < \frac{1}{x} < 1$.
2. L'ensemble $A = \left\{ \ y^2 - x^2 \ \middle| \ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \ \right\}$ admet 0 pour minimum.
3. L'ensemble $B = \left\{ \ y^2 - x^2 \ \middle| \ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \ , \ |x| < |y| \ \right\}$ admet 0 pour minimum.
4. Les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 1 + x + x^2$ et $g : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ sont égales.
5. Tout ensemble E vérifie que, pour tout couple de parties $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, si l'intersection $A \cap B$ est non vide, alors $A \setminus B \neq A$.