Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

Problème :

1. **(a)** • On a bien $n_0 \in \mathbb{N}$

car $\left\lfloor \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{Z}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$.

Alors $n \geq n_0 \geq \left\lfloor \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|} \right\rfloor + 1 \geq \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|}$

et $\ln |x| \leq 0$ car $|x| \leq 1$

donc $n \ln |x| \leq \ln \varepsilon$

puis $|x|^n = e^{n \ln |x|} \leq e^{\ln \varepsilon} = \varepsilon$.

(b) 1er cas : $R > 0$.

Posons $n_0 = \left(\left\lfloor \frac{\ln R}{\ln |x|} \right\rfloor + 1 \right)_+$

C'est possible car $|x| \neq 1$ donc $\ln |x| \neq 0$.

• On a bien $n_0 \in \mathbb{N}$

car $\left\lfloor \frac{\ln R}{\ln |x|} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{Z}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$.

Alors $n \geq n_0 \geq \left\lfloor \frac{\ln R}{\ln |x|} \right\rfloor + 1 \geq \frac{\ln R}{\ln |x|}$

et $\ln|x| \geq 0$ car $|x| > 1$

donc $n \ln|x| \geq \ln R$

puis $|x|^n = e^{n\ln|x|} \geq e^{\ln R} = R$.

2e cas : $R \leq 0$. Posons $n_0 = 0$. Alors on a bien $n_0 \in \mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ implique $|x|^n \geq 0 \geq R$.

2. (a). On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{2^n}.$$

(b). i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a,

comme $x \neq 1$ (car $|x| \neq 1$)

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} x^n.$$

~~Or $\lim_{n\to+\infty} |x|$~~

Or $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$ car $|x| < 1$.

D'où $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x}$.

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a,

comme $x \neq 1$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} x^k\right| = \frac{|1-x^{n+1}|}{|1-x|}$$

$$\leqslant \frac{|1| + |x|^{n+1}}{|1-x|} \leqslant \frac{2}{|1-x|}$$

car $|x| \leqslant 1$ donc $|x|^{n+1} \leqslant 1$.

iii. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Puisque $|x| \neq 1$, on a :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} x^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |x|^k = \frac{1-|x|^{n+1}}{1-|x|}.$$

Or $0 \leqslant |x| < 1$

donc $1 - |x|^{n+1} \leqslant 1$

et $1 - |x| > 0$.

D'où $\left|\sum_{k=0}^{n} x^k\right| \leqslant \frac{1-|x|^{n+1}}{1-|x|} \leqslant \frac{1}{1-|x|}$.

iv. 1er cas : $x \geq 0$.

Alors $|x| = x$ et $|1-x| = 1-x$

car $x \leq |x| < 1$.

D'où $\dfrac{2}{|1-x|} - \dfrac{1}{1-|x|} = \dfrac{1}{1-x} \geq 0$

car $x \leq 1$.

Ainsi $\dfrac{2}{|1-x|} \geq \dfrac{1}{1-|x|}$

et $\text{Min}\left(\left\{\dfrac{2}{|1-x|}, \dfrac{1}{1-|x|}\right\}\right) = \dfrac{1}{1-|x|}$.

2e cas : $x < 0$.

Alors $|x| = -x$ et $|1-x| = 1-x$.

D'où $\dfrac{2}{|1-x|} - \dfrac{1}{1-|x|} = \dfrac{2(1+x) - (1-x)}{(1-x)(1+x)}$

$= \dfrac{1+3x}{(1-x)(1+x)} = \dfrac{1+3x}{1-x^2}$.

Or $1-x^2 > 0$ car $|x| < 1$.

D'où $\text{Min}\left(\left\{\dfrac{2}{|1-x|}, \dfrac{1}{1-|x|}\right\}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-|x|} & \text{si } x \geq -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{|1-x|} & \text{sinon} \end{cases}$

Dans tous les cas, on a :

$$\text{Min}\left(\left\{\dfrac{2}{|1-x|}, \dfrac{1}{1-|x|}\right\}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-|x|} & \text{si } x \geq -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{|1-x|} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

3. (a) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1.$$

(b). Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$.

Alors $x \neq 1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

on a : $$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = x^n \, \frac{x - \frac{1}{x^n}}{x-1}.$$

Or $x > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = +\infty$.

On déduit $$\lim_{n \to +\infty} \frac{x - \frac{1}{x^n}}{x-1} = \frac{x}{x-1}.$$

Comme $\frac{x}{x-1} > 0$, on conclut

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = +\infty.$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x < -1$.

Alors, comme $x \neq 1$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{2n} x^k = \frac{1-x^{2n+1}}{1-x} = x^{2n} \, \frac{\frac{1}{x^{2n}} - x}{1-x}$$

et $$\sum_{k=0}^{2n+1} x^k = \frac{1-x^{2n+2}}{1-x} = x^{2n} \, \frac{\frac{1}{x^{2n}} - x^2}{1-x}.$$

Or $x^2 > 1$ car $|x| > 1$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (x^2)^n = +\infty$.

En particulier, on déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{(x^2)^n} - x}{1 - x} = \frac{-x}{1-x}$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{(x^2)^n} - x^2}{1 - x} = \frac{-x^2}{1-x}.$$

Comme $\frac{-x}{1-x} > 0$ et $\frac{-x^2}{1-x} < 0$

car $x < 0$,

on conclut :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{2n} x^k = +\infty$$

et $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} x^k = -\infty.$

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} 1^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1.$$

(b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k = \frac{1-(-1)^{2n+1}}{1-(-1)} = \frac{1-(-1)}{1-(-1)} = 1$$

et $\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k = \frac{1-(-1)^{2n+2}}{1-(-1)} = \frac{1-1}{1-(-1)} = 0$

car $(-1)^2 = 1$ donc $(-1)^{2n+1} = ((-1)^2)^n \times (-1) = -1$

et $(-1)^{2n+2} = ((-1)^2)^{n+1} = 1.$