Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2013-2014

Math I - CPGEI

Devoir n$^{\text{o}}$ 1

PROBLÈME

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

Dans ce qui suit, on notera $\lfloor\cdot\rfloor$ la partie entière et $(\cdot)_+$ la partie positive.

1. Soit $x \in \mathbf{R}^*$.
   (a) On suppose $0 < |x| < 1$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $n_0 = \left(\left\lfloor \frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|}\right\rfloor + 1\right)_+$.
   Montrer que $n_0 \in \mathbf{N}$ et que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, si $n \geq n_0$, alors $|x|^n \leq \varepsilon$.
   (b) On suppose que $x > 1$. Soit $R \in \mathbf{R}$.
   Donner explicitement $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, si $n \geq n_0$, alors $|x|^n \geq R$.

On admettra que ce qui précède suffit à démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a :
– si $|x| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$;
– si $x > 1$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = +\infty$.

2. (a) Calculer en fonction de $n \in \mathbf{N}$ la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$.
   (b) Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x| < 1$.
      i. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x}$.
      ii. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a
      $$\left|\sum_{k=0}^{n} x^k\right| \leq \frac{2}{|1-x|}.$$
      iii. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a
      $$\left|\sum_{k=0}^{n} x^k\right| \leq \frac{1}{1-|x|}.$$
      iv. Montrer que
      $$\min\left(\left\{\frac{2}{|1-x|}\,,\,\frac{1}{1-|x|}\right\}\right) = \begin{cases}\dfrac{1}{1-|x|} & \text{si } x \geq -\frac{1}{3}\\[2mm] \dfrac{2}{|1-x|} & \text{si } x \leq -\frac{1}{3}\end{cases}.$$

3. (a) Calculer en fonction de $n \in \mathbf{N}$ la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$.

   (b) Montrer que si $x \in \mathbf{R}$ est tel que $x > 1$, alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k \; = \; +\infty$.

   (c) Montrer que si $x \in \mathbf{R}$ est tel que $x < -1$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n} x^k \; = \; +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} x^k \; = \; -\infty.$$

4. (a) Calculer en fonction de $n \in \mathbf{N}$ la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1^k$.

   (b) Calculer en fonction de $n \in \mathbf{N}$ les sommes

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k.$$