Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

1

Partie commune :

Exercice 1.

1. Montrons le par récurrence.

- On a bien :

$$S_1 = 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

- Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_{n_0} = \frac{n_0(n_0+1)}{2}$.

Alors on a :

$$S_{n_0+1} = S_{n_0} + n_0 + 1 = \frac{n_0(n_0+1)}{2} + n_0 + 1$$

$$= (n_0+1)\left(\frac{n_0}{2} + 1\right) = \frac{(n_0+1)(n_0+2)}{2}$$

$$= \frac{(n_0+1)((n_0+1)+1)}{2}$$

- Conclusion : on a bien montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{a(n+1) + bn}{n(n+1)} = \frac{(a+b)n + a}{n(n+1)}$$

En particulier $(a,b) = (1,-1)$ convient

puisque : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(1-1)n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{S_j} \overset{\boxed{1.}}{=} \sum_{j=1}^{n} \frac{2}{j(j+1)}$$

$$= 2 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)}$$

$$\overset{\boxed{2.}}{=} 2 \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1} \right)$$

$$= 2 \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} \right)$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{S_j} = 2 - \frac{2}{n+1}.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{2}{n+1} = \frac{1}{n} \frac{2}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

D'où $\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{S_j} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\underline{2}$.

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

Exercice 2

- Pour tout $(x,y) \in [-2,1] \times [-1,3]$,

on a : $|y| \leqslant 3$

donc $0 \leqslant y^2 \leqslant 9$

puis $-8 \leqslant 1 - y^2 \leqslant 1$

d'où, comme $0 \leqslant |x| \leqslant 2$,

$-16 \leqslant -8|x| \leqslant |x|(1-y^2) \leqslant |x| \leqslant 2$.

Ainsi 2 est un majorant de A

et -16 en est un minorant.

Comme $2 = |-2|(1-0^2) \in A$

car $(-2,0) \in [-2,1] \times [-1,3]$,

on déduit : $\boxed{\operatorname{Max} A = 2.}$

De même, comme $-16 = |-2|(1-3^2) \in A$

car $(-2,3) \in [-2,1] \times [-1,3]$,

on déduit $\boxed{\operatorname{Min} A = -16}$.

- Soit $(x,y) \in [-4,7] \times [-2,1]$.

On a : $-2 \leqslant 2+x \leqslant 9$.

Si $-1 \leqslant y \leqslant 1$, alors on déduit

$$0 \leqslant 1+y \leqslant 2$$

donc $-4 \leqslant -2(1+y) \leqslant (2+x)(1+y) \leqslant 9(1+y) \leqslant 18$.

Sinon on a $-2 \leqslant y \leqslant -1$

donc $-1 \leqslant 1+y \leqslant 0$

puis $-9 \leqslant 9(1+y) \leqslant (2+x)(1+y) \leqslant -2(1+y) \leqslant 0$.

Dans tous les cas, on a :

$$-9 \leqslant (2+x)(1+y) \leqslant 18 .$$

Donc 18 est un majorant de B

et -9 en est un minorant.

Comme $18 = (2+7)(1+1) \in B$

car $(7,1) \in [-4,7] \times [-2,1]$

et $-9 = (2+7)(1+(-2)) \in B$

car $(7,-2) \in [-4,7] \times [-2,1]$

on déduit :

$\boxed{\text{Min } B = -9}$ et $\boxed{\text{Max } B = 18}$.

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

Exercice 3

1. D'après la formule du binôme de Newton, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= (p+(1-p))^n = 1^n = 1.$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k^{(n)} = 1}.$$

2. (a) On a :

$$E_0 = \sum_{k=0}^{0} k\, u_k^{(0)} = 0 \times u_0^{(0)} = 0$$

$$E_1 = \sum_{k=0}^{1} k\, u_k^{(1)} = 0 \times u_0^{(1)} + 1 \times u_1^{(1)}$$

$$= u_1^{(1)} = \binom{1}{1} p \times (1-p)^0 = p$$

$$E_2 = \sum_{k=0}^{2} k\, u_k^{(2)} = u_1^{(2)} + 2\, u_2^{(2)}$$

$$= \binom{2}{1} p(1-p) + 2 \binom{2}{2} p^2 (1-p)^0.$$

$$= 2p(1-p) + 2p^2 = 2p$$

$$E_3 = \sum_{k=0}^{3} k\, u_k^{(3)} = u_1^{(3)} + 2u_2^{(3)} + 3\, u_3^{(3)}$$

$$= 3\, p\, (1-p)^2 + 2 \times 3\, p^2 (1-p) + 3\, p^3$$

$$= 3p\left[1 - 2p + p^2 + 2p - 2p^2 + p^2\right] = 3p.$$

D'où

$E_0 = 0$, $E_1 = p$, $E_2 = 2p$ et $E_3 = 3p$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$.

On a :

$$n p\, u_{k-1}^{(n-1)} = n p \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)}$$

$$= n p \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^{k} (1-p)^{n-k}$$

$$= k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^{k} (1-p)^{n-k}$$

$$= k\, u_k^{(n)}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a :

$$E_n = \sum_{k=0}^{n} k\, u_k^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} k\, u_k^{(n)}$$

$$\overset{\boxed{(b)}}{=} \sum_{k=1}^{n} n p\, u_{k-1}^{(n-1)} = n p \sum_{k=1}^{n} u_{k-1}^{(n-1)}$$

$$= n p \sum_{k=0}^{n-1} u_k^{(n-1)} \overset{\boxed{1.}}{=} n p$$

donc $\boxed{E_n = n p}$

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

Exercice 4.

1. FAUX. On a : $-\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$

mais

$$\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} < \frac{1}{2} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right).$$

2. FAUX. On a : $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \mathbb{R}^2$

mais

$$\left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1 \neq 0 = 0 + 0 = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor$$

3. VRAI. En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

on a :

$$x^2 + 6x + y^2 - 10y - 15$$

$$= (x+3)^2 + (y-5)^2 - 15 - 3^2 - 5^2$$

$$= (x+3)^2 + (y-5)^2 - 49$$

$$= (x+3) + (y-5)^2 - 7^2.$$

Donc $\mathcal{E}_1$ est le cercle de centre

$(-3, 5)$ et de rayon 7.

4. VRAI. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

on a : $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$.

Donc $\mathcal{E}_2$ est l' union des

droites $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$

et $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\}$.

5. FAUX. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

On a à la fois $n_0\sqrt{2} + 1 \in \mathbb{R}^+$

et $n_0\sqrt{2} + 1 > n_0\sqrt{2}$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R}^+, x > n\sqrt{2}$.

6. VRAI. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

on a :

$$u_n = \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{n\sqrt{n} + 5} = \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + 1}{1 + \frac{5}{n\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{1}{n} \frac{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{5}{n\sqrt{n}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

car $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.