Feuille d'exercices n°5
DERIVABILITE DES FONCTIONS REELLES

Soit f : [a , b] $\to R$ et $x_0 \in]a\,,b\,[$: f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)- f(x_0)}{x- x_0}$ existe.

Cette limite est par définition la valeur de la dérivée de f en x_0 .On définit aussi la demi-dérivée

à droite en a et la demi - dérivée à gauche en b.

<u>Théorème</u> : Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en ce point.

<u>Théorème de Rolle</u> : Soit f : [a , b] $\to R$, continue sur [a , b] , dérivable sur $]a\,,b\,[$ et telle que

f(a) = f(b) alors il existe un point c $\in]a\,,b\,[$ où f'(c) = 0 .

<u>Théorème des accroissements finis</u> : : Soit f : [a , b] $\to R$, continue sur [a , b] , dérivable sur

] a , b [, alors il existe un point c ∈]a , b[tel que f(b) – f(a) = f'(c) (b-a) .

<u>Exercice 1</u> Soit f (x) = $\frac{\pi(\cos x-1)}{\sin x}$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$. Peut-on la prolonger en une fonction qui soit C^1 sur] $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ [?

<u>Exercice 2</u> : Soient les fonctions f, g, h définies sur R* par

f(x) = $\sin\frac{1}{x}$; g(x) = $x\sin\frac{1}{x}$; h(x) = $x^2\sin\frac{1}{x}$; on les prolonge en 0 par la valeur 0.

Sont-elles continues sur R , dérivables sur R , C^1 sur R ?

<u>Exercice 3</u> : Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x < 0 : \; e^x - 1 \\ 0 \le x \le 1 : cos^2(\pi x) \\ x > 1 \; : 1 + \frac{lnx}{x} \end{cases}$$

<u>Exercice 4</u> :
a - Montrer qu'un polynôme à coefficients réels de degré impair a au moins une racine réelle.
b - Soit $P(x) = x^n - x + 1\,, n \in N\,, n \ge 2$. Montrer que si n est pair , P n'a pas plus de 2 racines réelles et si n est impair, P n'a pas plus de 3 racines réelles.

<u>Exercice 5</u> : Soit P_n un polynôme de degré n , à coefficients réels .Montrer que la fonction

$f(x) = P_n(x) - e^x$ ne s'annule pas plus de n+1 fois sur R . *(On pourra prendre un exemple numérique pour P_n dans un premier temps).*

Exercice 6 : Soit f : $R \to R$, continue et dérivable avec f(0) = f'(0) =0 et telle qu'il existe a $\neq 0$ où f(a) = 0. Soit γ la courbe représentative de f dans le repère O x y . Montrer qu'il existe un point M $\neq$ O de γ en lequel la tangente à la courbe passe par O. *(on appliquera le théorème de Rolle à g(x) =* $\frac{f(x)}{x}$ *).*

Exercice7 : Soit f : [a , b] $\to R$, continue sur [a , b] , telle que f(a)≠f(b) . On suppose f dérivable à droite en a et à gauche en b avec ces 2 demi-dérivées nulles.

Montrer qu'il existe c ∈]a , b [tel que $\frac{\mathrm{f(c)-f(a)}}{\mathrm{c-a}} = \frac{\mathrm{f(c)-f(b)}}{\mathrm{c-b}} = \frac{\mathrm{f(b)-f(a)}}{\mathrm{b-a}}$. Interpréter géométriquement.

Exercice 8 : Soit f : [a , b] $\to R$, C^1 sur [a , b] , deux fois dérivable sur]a , b[et f(a) = f(b) = 0 .

Soit $x_0 \in$]a , b [: En appliquant le théorème de Rolle à $g(x) = f(x) - k\,\frac{(x-a)(x-b)}{2}$ où k est choisi tel que g (x_0) = 0, montrer qu'il existe au moins un réel d ∈]a , b [tel que $f(x_0) = \frac{1}{2}(x_0 - a)(x_0 - b)f''(d)$.

Exercice 9 : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 à coefficients réels. Ecrire le théorème des accroissements finis pour f sur un intervalle [x, x+h] . Qui y a –t-il de remarquable et quelle en est l'interprétation géométrique ?

Exercice 10 : A l'aide du théorème des accroissements finis ,montrer que

- Pour tout x et tout y réels on a $|sinx - siny| \leq |x - y|$

- Pour tout réel $x \geq 0$, $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$

Exercice 11 : A l'aide du théorème des accroissements finis appliqué à $f(x) = \ln(1+x)$ puis à $g(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ sur [0 , x], montrer que $\forall x \in]0,1[$, $\ln(1+x) < x < -\ln(1-x)$.

En déduire la limite de la suite définie par $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \ldots + \frac{1}{3n}$, n ≥ 1.

Exercice 12 : Soit $u_n = \frac{1}{2ln2} + \frac{1}{3ln3} + \ldots + \frac{1}{nlnn}$ pour n ≥ 1. Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis appliqué à $\ln(\ln x)$ sur [k , k+1] , avec k entier positif , que (u_n) tend vers + ∞ .

Exercice 13 : Ecrire le théorème des accroissements finis pour $f(x) = \sqrt{x}$ sur [k , k+1] ,k entier positif . Soit $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$: Montrer que cette suite converge et trouver sa limite.

Exercice 14 : 1- Montrer que l'équation $x = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$ possède une seule solution α , $0 < \alpha < 1$.

2- On définit la suite(u_n) par u_0 = 2 et $u_{n+1} = \sqrt{\frac{2-u_n}{2+u_n}}$.

a) Montrer que $\forall\, n \geq 1, u_n$ est définie et $0 \leq u_n \leq 1$.
b) A l'aide du théorème des accroissements finis, démontrer qu'il existe un réel k , $0 < k < 1$, tel que $\forall\, n \geq 1$, $|\, u_{n+2} - u_{n+1} \,| \leq k \,|\, u_{n+1} - u_n \,|$.
c) En déduire que(u_n) est une suite de Cauchy.
d) Montrer que sa limite est α .