Université Claude Bernard–Lyon I
L1 - parcours PMI de Mathématiques : Algèbre I
Année 2012–2013

Dénombrements

Les résultats à retenir

Théorème *Soit E et F deux ensembles de cardinaux finis respectifs n et p. Alors :*

(i) *On a :* $\mathrm{card}(E \cup F) = \mathrm{card}(E) + \mathrm{card}(F) - \mathrm{card}(E \cap F)$.

(ii) *On a :* $\mathrm{card}(E \times F) = \mathrm{card}(E)\,\mathrm{card}(F)$.

(iii) *Soit F^E l'ensemble des applications de E dans F. Alors :* $\mathrm{card}(F^E) = \mathrm{card}(F)^{\mathrm{card}(E)} = p^n$.

(iv) *Le nombre d'applications* injectives *de F dans E est :*

$$\mathbf{A}_n^p = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!} = n(n-1)\cdots(n-p+1) & \text{si } 0 \leq p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n, \end{cases}$$

(v) *En particulier, le nombre de bijections de E dans E est :* $n!$.

(vi) *Le nombre de parties à p éléments de E est :*

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \leq p \leq n. \\ 0 & \text{si } p > n. \end{cases}$$

Préliminaires techniques

Avant de démontrer le théorème, deux lemmes utiles.

Lemme *Soit E et F deux ensembles disjoints finis. Alors* $\mathrm{card}(E \cup F) = \mathrm{card}(E) + \mathrm{card}(F)$.

Démonstration. *Version informelle.* C'est évident, non ?
Version formelle. Soit $n = \mathrm{card}(E)$, $p = \mathrm{card}(F)$. On peut numéroter les éléments de E de sorte à avoir : $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ (en termes plus précis, l'application $f : \{1, \ldots, n\} \to E$, $i \mapsto x_i$ est une bijection). De même, on peut numéroter les éléments de F de sorte que $F = \{y_1, \ldots, y_p\}$.
Vérifions que l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \{1, \ldots, n+p\} & \longrightarrow & E \cup F \\ & k & \longmapsto & \begin{cases} x_k & \text{si } k \leq n, \\ y_{k-n} & \text{si } k \geq n+1, \end{cases} \end{array}$$

est une bijection. Il en résulte que $\mathrm{card}(E \cup F) = n + p$.
En effet, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a : $x_i = \Phi(i)$ et pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, on a : $y_j = \Phi(n+j)$; la surjectivité de Φ en résulte.
D'autre part, si k et k' ont la même image $z = \Phi(k) = \Phi(k')$, alors z appartient soit à E, soit à F, mais pas aux deux (E et F sont disjoints). Par suite, k et k' sont tous deux inférieurs ou égaux à n, soit tous deux supérieurs ou égaux à $n+1$. Dans le premier cas, l'égalité $x_k = \Phi(k) = \Phi(k') = x_{k'}$ entraîne, par injectivité de f, que $k = k'$; le deuxième cas est identique. Ainsi, Φ est injective. □

Corollaire *Soit $E_1, \ldots, E_r$ une famille finie d'ensembles finis, deux à deux disjoints. Alors :*

$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{i=1}^{r} E_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{card}(E_i).$$

Le corollaire se déduit du lemme par récurrence sur r (exercice).

Lemme (des bergers) *Soit $p : E \to F$ une application et k un entier relatif. On suppose que (p est surjective et que) tout élément de F possède exactement k antécédents : $\forall y \in F$, $\mathrm{card}(p^{-1}(y)) = k$. Alors, on a :*
$$\mathrm{card}(E) = k\,\mathrm{card}(F).$$

Démonstration. *Version informelle.* Si E désigne l'ensemble des pattes de moutons d'un troupeau, si F désigne l'ensemble des moutons, si p est l'application qui associe à une patte le mouton qui lui est attachée et si chaque mouton a 4 pattes alors on a 4 fois plus de pattes que de moutons.
Version formelle. Pour $y \in F$, on note $E_y = p^{-1}(y)$. Alors les parties E_y de E sont deux à deux disjointes : si $x \in E_y \cap E_{y'}$ pour $y, y' \in F$, on a $y = p(x) = y'$. De plus, leur réunion est E entier : pour $x \in E$ et $y = p(x)$, on a $x \in E_y$. D'après le corollaire, il vient :
$$\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}\left(\bigcup_{y\in F} E_y\right) = \sum_{y\in F}\mathrm{card}(E_y) = \sum_{y\in F} k = k\,\mathrm{card}(F).$$

Preuve du théorème
(i) *Version informelle.* Si on ajoute les éléments de E et de F, on compte tous les éléments de $E \cup F$, mais on a compté ceux de $E \cap F$ deux fois. Pour trouver $\mathrm{card}(E \cup F)$, il faut donc soustraire $\mathrm{card}(E \cap F)$ à $\mathrm{card}(E) + \mathrm{card}(F)$ pour corriger.
Version formelle. Soit $E' = E \setminus F$, $F' = F \setminus E$. On vérifie que $E \cup F$ est la réunion disjointe de E', $E \cap F$ et F', ce qui donne : $\mathrm{card}(E \cup F) = \mathrm{card}(E') + \mathrm{card}(E \cap F) + \mathrm{card}(F')$. Or, E est la réunion disjointe de E' et $E \cap F$, d'où : $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(E') + \mathrm{card}(E \cap F)$ et, de même : $\mathrm{card}(F) = \mathrm{card}(F') + \mathrm{card}(E \cap F)$. En remplaçant $\mathrm{card}(E')$ et $\mathrm{card}(F')$ dans la première équation, l'égalité tombe.

(ii) *Version informelle.* Pour déterminer un couple dans $E \times F$, on a $\mathrm{card}(E)$ choix pour le premier élément du couple et $\mathrm{card}(F)$ pour le second ; or, ces choix sont indépendants, donc on multiplie le nombre de possibilités.
Version formelle. Soit $p : E \times F \to F$, $(x, y) \mapsto y$. Pour tout $y \in F$, on a : $p^{-1}(y) = \{(x, y),\ x \in E\}$: d'où : $\mathrm{card}(p^{-1}(y)) = \mathrm{card}(E)$. Par le lemme des bergers, il vient : $\mathrm{card}(E \times F) = \mathrm{card}(E)\,\mathrm{card}(F)$.

(iii) *Version informelle.* On a $\mathrm{card}(F)$ possibilités pour le choix de chaque image d'un élément de E ; or, on a $\mathrm{card}(E)$ choix indépendants à effectuer ; d'où $\mathrm{card}(F) \times \mathrm{card}(F) \times \cdots$ ($\mathrm{card}(E)$ facteurs) possibilités en tout.
Version formelle. On procède par récurrence sur $\mathrm{card}(E)$. Pour E vide, il y a exactement une application de E dans F, son graphe est vide : $\mathrm{card}(F^E) = 1 = \mathrm{card}(F)^0$. Pour $E = \{x_0\}$ un singleton, une application de E dans F est déterminée par l'image de x_0, qui est un élément quelconque de F : il y en a donc $\mathrm{card}(F) = \mathrm{card}(F)^1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que pour tout ensemble F et tout ensemble E' de cardinal n, il y ait $\mathrm{card}(F)^n$ application de E' dans F.
Soit F un ensemble fini et E un ensemble de cardinal $n+1$. Fixons $x_0 \in E$ et notons $E' = E\setminus\{x_0\}$. Une application f de E dans F est déterminée par la donnée de l'image de x_0, qui est un élément quelconque de F, et de la restriction de l'application à E', c'est-à-dire l'application $f|_{E'} : E' \to F$,

$x \mapsto f(x)$. En d'autres termes, il y a une bijection $\Phi : F^E \to F \times F^{E'}$, $f \mapsto (f(x_0), f|_{E'})$. Par l'assertion (ii) et l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\operatorname{card}(F^E) = \operatorname{card}(F)\operatorname{card}(F^{E'}) = \operatorname{card}(F)\operatorname{card}(F)^{\operatorname{card}(E')} = \operatorname{card}(F)\operatorname{card}(F)^{\operatorname{card}(E)-1},$$

ce qui permet de conclure.

(iv) *Version informelle.* On trie les éléments de F. On a n possibilités pour choisir l'image du premier élément ; il reste $n-1$ possibilités pour choisir l'image du deuxième (elle doit être différente de celle du premier) ; il reste alors $n-2$ choix pour l'image du troisième élément ; et ainsi de suite, jusqu'à trouver $n-p+1$ possibilités pour le choix du p^{e} élément de F. En tout, on a donc : $n(n-1)\cdots(n-p+1)$ choix.
Version formelle. Par le principe des tiroirs, il n'y a pas d'injection de F dans E si $\operatorname{card}(F) > \operatorname{card}(E)$. On montre, par récurrence sur p, que pour tout ensemble F de cardinal p et tout ensemble E de cardinal $n \geq p$, le nombre d'injections de F dans E est : $n(n-1)\cdots(n-p+1)$. Par convention, si $p = 0$, ce produit vaut 1 : il y a bien une application de $\emptyset$ vers E et elle est injective.
Pour $p = 1$, l'assertion est évidente : F est un singleton et, pour tout ensemble E non vide, toute application de F dans E est injective. Si $n = \operatorname{card}(E)$, le nombre d'injections est donc : $n^1 = n$.
Soit $p \in \mathbb{N}$, on suppose l'assertion vraie pour tout ensemble F' de cardinal p et tout ensemble E' de cardinal $n \geq p$. Soit F un ensemble de cardinal $p+1$ et E un ensemble de cardinal $n \geq p+1$. Fixons $y_0 \in F$ et notons $F' = F \setminus \{y_0\}$.
Notons $I(F,E)$ l'ensemble des injections de F dans E, dont on cherche le cardinal, et considérons $\Phi : I(F,E) \to E$, $f \mapsto f(y_0)$. Pour $x \in E$ fixé, un élément de $\Phi^{-1}(x)$ est une injection de F dans E qui prend la valeur [1] x en y_0. Une telle injection est déterminée par sa restriction à F', qui est une injection de F' dans $E \setminus \{x\}$. Par hypothèse de récurrence, comme F' a p éléments et que $E \setminus \{x\}$ en a $n-1$, il y en a : $\operatorname{card}(\Phi^{-1}(x)) = (n-1)(n-2)\cdots(n-1-p+1)$.
D'après le lemme des bergers appliqué à Φ (ici, $k = n$), on a : $\operatorname{card} I(E,F) = n \times (n-1)(n-2)\cdots(n-1-p+1) = n(n-1)\cdots(n-(p+1)+1)$. On peut conclure la récurrence.

(v) Si $\operatorname{card}(F) = \operatorname{card}(E)$, par exemple si $F = E$, une application injective est nécessairement bijective et inversement. Or, pour $p = n$, la formule donne exactement : $A_n^n = n(n-1)\cdots\times 1 = n!$.
(vi) *Version informelle.* Une partie à p éléments, c'est une liste ordonnée de p éléments dont on oublie l'ordre : il y a $n(n-1)\cdots(n-p+1)$ telles listes ordonnées, et pour chacune, $p!$ façons de changer l'ordre sans changer les éléments. Il y a donc $n(n-1)\cdots(n-p+1)/p!$ parties.
Version formelle. Bien sûr, [2] si $p > n$, pas de partie à p éléments ! On suppose donc $p \leq n$.
Notons $I_p(E)$ l'ensemble des injections de $\{1,\ldots,p\}$ dans E, et $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des parties de E à p éléments. À une injection $f \in I_p(E)$, on associe $\Phi(f) = \{f(1),\ldots,f(p)\}$. Par injectivité de f, $\Phi(f)$ est une partie à p éléments de E.
L'application Φ est surjective. Soit F est une partie à p éléments, on peut numéroter ses éléments $f(1),\ldots,f(p)$, ce qui définit une injection $f : \{1,\ldots,p\} \to E$, telle que $\Phi(f) = F$.
Plus précisément, F possède $p!$ antécédents : en effet, si f_0 est l'un d'entre eux, un autre antécédent f est de la forme $f_0 \circ \sigma$, où σ est une bijection de $\{1,\ldots,p\}$ dans lui-même (f_0 et f « sont » deux bijections de $\{1,\ldots,p\}$ sur F, donc $\sigma = f_0^{-1} \circ f$ est une bijection de $\{1,\ldots,p\}$ dans lui-même).
Par le lemme des bergers, on a : $n(n-1)\cdots(n-p+1) = \operatorname{card} I_p(E) = p! \operatorname{card} \mathcal{P}_p(E)$,ce qui permet de conclure.

1. Petite perversité des notations, peut-être...
2. Si $F \subset E$, alors $F \to E$, $x \mapsto x$ est une injection. Par le principe des tiroirs : $\operatorname{card}(F) \leq \operatorname{card}(E)$.

Non-dénombrabilité de $\mathbb{R}$
Voici deux méthodes pour prouver le théorème suivant.

Théorème *L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

Démonstration. *Première méthode : argument diagonal de Cantor.*
Comme le cardinal de $\mathbb{R}$ est supérieur ou égal au cardinal de $[0,1[$, il suffit de montrer que cet intervalle n'est pas dénombrable. Pour cela, on fixe une application (une suite) $u : \mathbb{N}^* \to [0,1[$, $n \mapsto u_n$, et on prouve que u n'est pas surjective.
Pour $n, m \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n^{(m)}$ le m^{e} chiffre du développement décimal propre de u_n : c'est un élément de $\{0, \dots, 9\}$ et on a, pour tout n :

$$u_n = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{u_n^{(m)}}{10^m}.$$

(On sait de plus qu'à n fixé, la suite $(u_n^{(m)})_{m\geq 1}$ ne stationne pas à 9. Mais ici, on s'en fiche.)
Le nom de la preuve vient de la disposition suivante de la suite des réels :

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & 0, u_1^{(1)} u_1^{(2)} u_1^{(3)} \cdots, \\ u_2 & = & 0, u_2^{(1)} u_2^{(2)} u_2^{(3)} \cdots, \\ u_3 & = & 0, u_3^{(1)} u_3^{(2)} u_3^{(3)} \cdots, \\ \vdots & & \\ u_n & = & 0, u_n^{(1)} u_n^{(2)} u_n^{(3)} \cdots u_n^{(n)} \cdots. \\ \vdots & & \end{array}$$

On définit alors un réel x en posant :

$$\forall m \geq 1, \quad x_m = \begin{cases} 2 & \text{si } u_m^{(m)} \neq 2, \\ 7 & \text{si } u_m^{(m)} = 2, \end{cases} \quad \text{et} \quad x = \sum_{m \geq 0} \frac{x_m}{10^m}.$$

Il y a un peu d'arbitraire ici : la seule chose qui compte, c'est que l'on ait $x_m \neq u_m^{(m)}$ pour tout m. Comme la suite (x_m) ne prend jamais la valeur 9, elle ne stationne pas à 9 et c'est donc bien le développement décimal de x.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On peut affirmer que $x \neq u_n$, puisque les n^{es} chiffres de x et u_n diffèrent, alors que le développement décimal propre est unique. Il en résulte que l'application n'est u n'est pas surjective, ce qu'il fallait démontrer. C'est une très belle preuve, non ?

Deuxième méthode : développement dyadique.
La première méthode prouve que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable mais ne permet pas de comparer $\mathbb{R}$ à $\mathbb{N}$. Cette deuxième méthode donne un résultat plus précis, puisqu'elle prouve que l'on a : $\operatorname{card} \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \operatorname{card} \mathbb{R}$ (cette relation entraîne le théorème puisqu'aucun ensemble n'est en bijection avec l'ensemble de ses parties).
Partons d'une partie A de $\mathbb{N}^*$. Sa fonction indicatrice est l'application $\mathbf{1}_A : \mathbb{N}^* \to \{0,1\}$ qui associe à un entier n le nombre $\mathbf{1}_A(n) = 1$ si $n \in A$ et $\mathbf{1}_A(n) = 0$ si $n \notin A$. On définit alors un réel $x_A \in [0,1]$ par :

$$x_A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_A(n)}{2^m}.$$

Comme tout élément[3] de $[0,1]$ possède un développement dyadique, l'application $X : \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \to [0,1]$, $A \mapsto x_A$ est surjective. Par suite, on a : $\operatorname{card} \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \geq \operatorname{card}([0,1])$.
Malheureusement, notre application n'est pas injective à cause des développements impropres. Par exemple, si $A = \{2\}$ et $A' = \{3,4,5,6,\ldots\}$, on a :

$$x_A = \frac{1}{2^2}, \quad x_{A'} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^3} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} = x_A.$$

Qu'à cela ne tienne. Étant donné A comme ci-dessus, on peut aussi lui associer

$$y_A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_A(n)}{3^n}.$$

On obtient une autre application $Y : \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \to [0,1]$: comme $\mathbf{1}_A(n) < 2$, la suite $(\mathbf{1}_A(n))_{n\geq 1}$ ne stationne pas à 2, donc c'est un développement triadique (en base 3) propre. Par unicité d'un tel développement, Y est injective. Par suite, on a : $\operatorname{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)) \leq \operatorname{card}([0,1])$.
On utilise le théorème de Cantor-Bernstein pour conclure : $\operatorname{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)) = \operatorname{card}([0,1])$.
Pour terminer, il faut se convaincre que l'existence d'une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^*$ en induit une[4] de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$, que $[0,1]$ est en bijection[5] avec $]0,1[$, et enfin que $]0,1[$ est en bijection[6] avec $\mathbb{R}$. Au bilan : $\operatorname{card} \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \operatorname{card} \mathbb{R}$.□

Développement : fonctions caractéristiques
Les fonctions caractéristiques utilisées ci-dessus peuvent être très utiles, en particulier pour les dénombrements. Lorsque A est une partie d'un ensemble E, la fonction caractéristique de A est l'application $\mathbf{1}_A$ de E dans $\{0,1\}$, ou de E dans $\mathbb{R}$ (comme on préfére), définie par :

$$\forall x \in A, \quad \mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Lemme *Soit E un ensemble. L'application $\mathbf{1} : \mathcal{P}(E) \to \{0,1\}^E$, $A \mapsto \mathbf{1}_A$ est une bijection de l'ensemble des parties vers l'ensemble des applications de E vers $\{0,1\}$.*
En particulier, si E est fini, on a : $\operatorname{card} \mathcal{P}(E) = 2^{\operatorname{card}(E)}$.

Idée. Pour décrire une partie A, il suffit de savoir si pour chaque élément x de E, il appartient à A (on code ça par un 1) ou pas (on code ça par un 0). Toutes ces informations forment une application de E dans $\{0,1\}$, qui à x associe 1 ou 0 selon le cas.
Démonstration. Introduisons l'application $\Psi : \{0,1\}^E \to \mathcal{P}(E)$, $f \mapsto f^{-1}(1)$. On va montrer que Φ et Ψ sont réciproques l'une de l'autre.
Dans un premier temps, soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et $f = \Phi(A) = \mathbf{1}_A$. Alors, pour $x \in E$, on a : $f(x) = 1$ si $x \in A$, $f(x) = 0$ sinon. Par suite, les éléments dont l'image est 1 sont les éléments de A ; en d'autres termes, l'ensemble des antécédents de 1 est A : $f^{-1}(1) = A$. Cela signifie qu'on a : $\Psi(f) = A$. Ainsi : $\Psi \circ \Phi(A) = A$.

3. Y compris 1, qu'on peut écrire par le développement impropre : $1 = \sum_{n\geq 1} 1/2^n = x_{\mathbb{N}^*}$.
4. Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ est une bijection, l'application $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$, $A \mapsto f(A)$ est une bijection.
5. Écrire $[0,1[$ comme réunion disjointe de $A = \{n/(n+1),\ n \in \mathbb{N}\}$ et de son complémentaire B, remarquer que A est en bijection avec $A' = \{n/(n+1),\ n \in \mathbb{N}^*\}$ et remarquer enfin que $]0,1[= A' \cup B$. Cela montre que $[0,1[$ est en bijection avec $]0,1[$. On montre de même que $[0,1]$ est en bijection avec $[0,1[$.
6. La fonction $]0,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan \pi(x - 1/2)$ est une bijection.

Vice versa, on se donne $f : E \to \{0,1\}$. Soit $A = \Psi(f)$: c'est l'ensemble des éléments de E qui ont pour image 1 par f, les autres ayant pour image 0. Cela signifie que f est la fonction caractéristique de A, c'est-à-dire : $\Phi(A) = \mathbf{1}_A = f$. Par suite : $\Phi \circ \Psi(f) = f$.□

Voici deux autres applications de la notion. On commence par des propriétés de base.

Lemme *Soit A, B deux parties d'un ensemble E. On a :*

(i) $\sum_{x\in E} \mathbf{1}_A(x) = \mathrm{card}(A)$ *;*

(ii) $\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{E\setminus A} = 1$ *(la fonction constante* 1*) ;*

(iii) $\mathbf{1}_{A\cap B} = \min(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$ *;*

(iv) $\mathbf{1}_{A\cup B} = \max(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$*.*

Démonstration. (i) Dans la somme de droite, il y a autant de termes égaux à 1 que d'éléments de A, les autres termes sont nuls.
(iv) Soit $x \in E$. Si $x \notin A \cup B$, alors $x \notin A$ et $x \notin B$, donc $\mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_B(x) = 0$: les deux membres de l'égalité sont nuls. Si $x \in A \cup B$, trois cas peuvent se produire. Si x appartient à A mais pas à B, on a : $\mathbf{1}_A(x) = 1$, $\mathbf{1}_B(x) = 0$ donc
On peut aussi s'y prendre autrement en utilisant les propriétés (i) et (ii), dont la preuve est laissée à la sagacité du lecteur. On commence par remarquer que le complémentaire de $A \cup B$ est : ${}^c(A\cup B) = {}^cA \cap {}^cB$. Par suite :

$$1 - \mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_{{}^c(A\cup B)} = \mathbf{1}_{{}^cA\cap{}^cB} = \mathbf{1}_{{}^cA}\mathbf{1}_{{}^cB} = (1-\mathbf{1}_A)(1-\mathbf{1}_B) = 1 - \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B.\square$$

Proposition 0°.1 *Soit E un ensemble fini de cardinal n. La somme des cardinaux des parties de E est :*

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{A\subset E} \mathrm{card}(A) = n2^{n-1}.$$

Démonstration. Pour la première égalité, on regroupe dans la somme de droite les parties A de même cardinal : pour chaque valeur de k, il y a $\binom{n}{k}$ parties de cardinal k.
Pour la deuxième, on part de la relation (i) du lemme :

$$\mathrm{card}(A) = \sum_{x\in E} \mathbf{1}_A(x).$$

On injecte et on en déduit en permutant deux sommes :

$$\sum_{A\subset E} \mathrm{card}(A) = \sum_{A\subset E}\sum_{x\in E} \mathbf{1}_A(x) = \sum_{x\in E}\sum_{A\subset E} \mathbf{1}_A(x).$$

Fixons $x \in E$. Les parties A pour lesquelles $\mathbf{1}_A(x)$ n'est pas nul sont les parties qui contiennent x. Il y en a autant que de parties de $E \setminus \{x\}$ (une partie de E qui contient x, c'est la réunion de $\{x\}$ et d'une partie de E qui ne contient pas x...). Par suite, il y en a : $2^{\mathrm{card}(E\setminus\{x\})} = 2^{n-1}$. Ainsi, chaque terme de la somme $\sum_{x\in E}$ vaut 2^{n-1}, donc la somme vaut $n2^{n-1}$.□

Théorème (Principe d'inclusion-exclusion ou formule du crible) *Soit n un entier naturel non nul et $A_1, \ldots, A_n$ des parties finies d'un ensemble E. Alors on a :*

$$\begin{aligned}\mathrm{card}\bigcup_{i=1}^{n} A_i &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{\{i_1<\cdots<i_k\}\subset\{1,\cdots,n\}} \mathrm{card}\bigcap_{\ell=1}^{k} A_{i_\ell} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{card}\, A_i - \sum_{i_1<i_2} \mathrm{card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}) + \cdots + (-1)^{n-1}\mathrm{card}(A_1\cap\cdots\cap A_n).\end{aligned}$$

Pour $n = 2$, cette formule est exactement la formule (iv) du lemme (ou presque : il faut remplacer A par A_1 et B par A_2)

Démonstration. Quitte à remplacer E par la réunion des A_i, on peut supposer que E est fini. On procède comme dans la deuxième preuve du lemme, en remarquant que le complémentaire de la réunion des A_i est l'intersection des complémentaires des A_i :

$$
\begin{aligned}
1 - \mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} &= \mathbf{1}_{\bigcap_{i=1}^n {}^c A_i} = \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{{}^c A_i} = \prod_{i=1}^n (1 - \mathbf{1}_{A_i}) \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \prod_{\ell=1}^k \mathbf{1}_{A_{i_\ell}} \\
&= 1 - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \mathbf{1}_{\bigcap_{\ell=1}^k A_{i_\ell}}.
\end{aligned}
$$

Il n'y a plus qu'à appliquer la formule (i) du lemme.