Chapitre 6

Calcul différentiel

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E, F, G sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimensions finies non nulles (on notera généralement $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$), U désigne un ouvert de E et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

6.1 Différentielle d'une fonction

6.1.1 Développement limité à l'ordre 1

Définition 1. *Soient $f : U \subset E \longrightarrow F$ et $a \in U$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en a s'il existe une application linéaire $u : E \longrightarrow F$ et une fonction ε définie au voisinage de 0_E telle que*

$$f(a+h) = f(a) + u(h) + \|h\|\varepsilon(h) \qquad \text{avec } \varepsilon(h) \underset{h\to 0_E}{\longrightarrow} 0_F.$$

On notera ceci : $f(a+h) = f(a) + u(h) + o(\|h\|)$ lorsque $h \to 0_E$.

Exemple : pour $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, f admet un développement limité à l'ordre 1 en $(0,0)$ si et seulement s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x,y) = f(0,0) + ax + by + o(\|(x,y)\|) \qquad \text{lorsque } (x,y) \to (0,0).$$

Proposition 1. *Soient $f : U \subset E \longrightarrow F$ et $a \in E$. Si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a, il y a unicité de l'application linéaire u décrivant le développement limité.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$ décrivant un développement limité à l'ordre 1 de f en a. Il existe alors deux fonctions $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ définies au voisinage de 0_E telles que

$$f(a+h) = f(a) + u(h) + \|h\|\varepsilon_1(h) \quad \text{et} \quad f(a+h) = f(a) + v(h) + \|h\|\varepsilon_2(h) \quad \text{avec } \varepsilon_i(h) \underset{h\to 0_E}{\longrightarrow} 0_F.$$

Par suite, en retranchant ces deux expressions, on obtient

$$u(h) - v(h) = \|h\|(\varepsilon_2(h) - \varepsilon_1(h)) \underset{h\to 0_E}{\longrightarrow} 0_F.$$

Soit $x \in E$, on pose $h = \lambda x$ avec $\lambda \in]0; +\infty[$ que l'on fera tendre vers 0^+. On a alors

$$u(\lambda x) - v(\lambda x) = \|\lambda x\|(\varepsilon_2(\lambda x) - \varepsilon_1(\lambda x))$$

ce qui entraîne par linéarité de u et v, et par homogénéité de la norme, que

$$u(x) - v(x) = \|x\|(\varepsilon_2(\lambda x) - \varepsilon_1(\lambda x)) \underset{\lambda \to 0^+}{\longrightarrow} 0_F.$$

Il s'ensuit que $u(x) = v(x)$ pour tout $x \in E$, et donc $u = v$, ce qui démontre l'unicité de u. □

6.1.2 Différentiabilité en un point

Définition 2. *Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$. On dit que f est **différentiable** en $a \in U$ s'il existe une application linéaire $u : E \longrightarrow F$ telle que :*

$$\lim_{h \overset{\neq}{\to} 0_E} \frac{\|f(a+h) - f(a) - u(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0.$$

Remarque. Puisque dans un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et que la notion de limite est invariante par passage à une norme équivalente, on peut choisir les normes que l'on veut sur E et F. Dans la suite, on marquera donc indifféremment $\| \ \|$ pour $\| \ \|_E$ et $\| \ \|_F$.

Proposition 2. *Soient $f : U \subset E \longrightarrow F$ et $a \in U$. On a équivalence entre :*

(i). f est différentiable en a,

(ii). f admet un développement limité à l'ordre 1 en a.

Démonstration. Cela résulte simplement de l'équivalence :

$$\begin{aligned}
& \frac{\|f(a+h) - f(a) - u(h)\|_F}{\|h\|_E} \underset{h \overset{\neq}{\to} 0_E}{\longrightarrow} 0 \\
\iff \quad & \frac{f(a+h) - f(a) - u(h)}{\|h\|_E} \underset{h \overset{\neq}{\to} 0_E}{\longrightarrow} 0_F \\
\iff \quad & \exists \varepsilon \text{ définie au voisinage de } 0_E, \quad \frac{f(a+h) - f(a) - u(h)}{\|h\|_E} = \varepsilon(h) \text{ avec } \varepsilon(h) \underset{h \to 0_E}{\longrightarrow} 0_F \\
\iff \quad & \exists \varepsilon \text{ définie au voisinage de } 0_E, \quad f(a+h) - f(a) - u(h) = \|h\|_E \varepsilon(h) \text{ avec } \varepsilon(h) \underset{h \to 0_E}{\longrightarrow} 0_F
\end{aligned}$$

puisque les deux termes de l'égalité précedente sont nuls pour $h = 0_E$. □

Proposition 3. *Si f est différentiable en a, l'application linéaire u est unique. On la note $\mathrm{d}f(a)$, appelée différentielle de f en a. Par définition, $\mathrm{d}f(a)$ appartient à $\mathcal{L}(E, F)$. Ainsi,*

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + o(\|h\|) \quad \textit{quand } h \longrightarrow 0_E.$$

Démonstration. Cela provient de l'unicité de la fonction linéaire dans l'écriture du développement limité à l'ordre 1. □

Exemples :

1. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application constante. Alors pour tout $a \in E$, pour tout $h \in E \backslash \{0_E\}$, on a
$$0 = \frac{\|f(a+h) - f(a)\|}{\|h\|} = \frac{\|f(a+h) - f(a) - u(h)\|}{\|h\|} \underset{h \to 0_E}{\longrightarrow} 0$$
avec $u = \widetilde{0}$ linéaire (où $\widetilde{0}$ désigne la fonction nulle). Par suite, f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) = \widetilde{0}$.
2. Soit $f : E \longrightarrow F$ linéaire. Alors pour tous $a, h \in E$, on a $f(a+h) = f(a) + f(h)$ avec f linéaire. Par suite, pour h non nul,
$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - f(h)\|}{\|h\|} = 0 \underset{h \to 0_E}{\longrightarrow} 0$$
ce qui démontre que f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) = f$. (On peut aussi les écrire avec des développements limités si l'on préfère.)

Théorème 1. *Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$. Si f est différentiable en $a \in U$, alors f est continue en a.*

Démonstration. Supposons f différentiable en a. Montrer que f est continue en a revient à montrer que $f(x)$ tend vers $f(a)$ lorsque x tend vers a, ce qui équivaut encore à montrer que $f(a+h)$ tend vers $f(a)$ lorsque h tend vers 0_E. Il existe une fonction ε définie sur un voisinage V de 0_E vérifiant
$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + \|h\|\varepsilon(h) \qquad \text{avec } \varepsilon(h) \underset{h \to 0_E}{\longrightarrow} 0_F.$$
Or l'application linéaire $\mathrm{d}f(a)$ est continue puisq'au départ d'un espace vectoriel de dimension finie, ce qui entraîne :
$$f(a+h) \underset{h \to 0_E}{\longrightarrow} f(a) + \underbrace{\mathrm{d}f(a)(0_E)}_{=0_F} + 0_F = f(a)$$
et démontre la continuité de f en a. □

Pour les fonctions d'une seule variable réelle, on a vu au semestre précédent la notion de dérivabilité en un point : $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow F$ est dérivable en a si
$$\frac{1}{t}(f(a+t) - f(a)) \underset{t \overset{\neq}{\to} 0}{\longrightarrow} \ell \in F$$
On dit alors que f est dérivable en a, et cette limite est appelée la dérivée de f en a, notée $f'(a)$.

Étudions le lien entre la différentiabilité et la dérivabilité en un point.

Proposition 4. *Soient I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \longrightarrow F$. On a équivalence entre :*

(i). f est différentiable en a,

(ii). f est dérivable en a.

Dans ce cas, on a alors
$$\mathrm{d}f(a) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & F \\ h & \longmapsto & hf'(a) \end{array} \qquad \text{et} \qquad f'(a) = \mathrm{d}f(a)(1)$$
où l'on rappelle que $f'(a) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(a+t) - f(a))$.

Démonstration. Avant de faire la preuve, remarquons que puisque h est réel, $o(\|h\|) = o(|h|) = o(h)$ lorsque $h \to 0$.

- $(i) \Rightarrow (ii)$: Supposons que f est différentiable en a, quand $h \to 0$, on a $f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + o(h)$ donc
$$\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)) = \frac{1}{h}(\mathrm{d}f(a)(h) + o(h)) = \mathrm{d}f(a)(1) + o(1) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \mathrm{d}f(a)(1)$$
puisque par linéarité de $\mathrm{d}f(a)$, on a $\mathrm{d}f(a)(h) = h\,\mathrm{d}f(a)(1)$. Ainsi, f est dérivable en a et $f'(a) = \mathrm{d}f(a)(1)$.
- $(ii) \Rightarrow (i)$: Supposons que f est dérivable en a, alors $\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f'(a)$, donc on peut écrire
$$\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)) = f'(a) + \varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$$
ce qui donne
$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h) = f(a) + u(h) + o(h)$$
avec $u : h \in \mathbb{R} \longmapsto hf'(a)$ linéaire de $\mathbb{R}$ dans F. Ceci implique que f est différentiable en a et que sa différentielle en a est donnée par $\mathrm{d}f(a) : h \in \mathbb{R} \longmapsto hf'(a)$.

□

6.1.3 Fonctions différentiables

Définition 3. *Une fonction $f : U \subset E \longrightarrow F$ est dite **différentiable** (sur U) si elle est différentiable en tout point a de U. L'application*
$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}f : & U & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,F) \\ & a & \longmapsto & \mathrm{d}f(a) \end{array}$$
est alors appelée différentielle de f.

Théorème 2. *Les fonctions différentiables sont continues.*

Grâce aux exemples étudiés ci-dessus, on a directement les résultats suivants.

Proposition 5. *Si $f : E \longrightarrow F$ est constante, alors f est différentiable et sa différentielle est l'application nulle : pour tout $a \in E$, $\mathrm{d}f(a) = \widetilde{0}$ où $\widetilde{0}$ désigne $0_{\mathcal{L}(E,F)}$.*

Proposition 6. *Si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire, alors f est différentiable et sa différentielle est constante :*
$$\forall a \in E, \quad \mathrm{d}f(a) = f.$$

Exemple : En particulier, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, les applications
$$p_i : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \longmapsto x_i$$
sont différentiables, et pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, $\mathrm{d}p_i(a_1, \ldots, a_n) = p_i$.

Proposition 7. *Soient I un intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$ et $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow F$. On a l'équivalence :*

$$f \text{ est différentiable si, et seulement si, } f \text{ est dérivable.}$$

Un autre exemple important à connaître est celui des applications bilinéaires, dont la preuve sera vue en TD.

Proposition 8. *Si $\varphi : E \times F \longrightarrow G$ est une application bilinéaire, alors φ est différentiable, et on a*

$$\forall (x,y) \in E \times F,\ \mathrm{d}\varphi(x,y) : \begin{array}{ccc} E \times F & \longrightarrow & G \\ (h,k) & \longmapsto & \varphi(x,k) + \varphi(h,y). \end{array}$$

6.1.4 Opérations sur les fonctions différentiables

Proposition 9. *Soient $f, g : U \subset E \longrightarrow F$. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, si f et g sont différentiables, alors $\lambda f + \mu g$ l'est aussi et*

$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g) = \lambda \, \mathrm{d}f + \mu \, \mathrm{d}g.$$

Démonstration. Soit $a \in U$. Pour $h \in E$ non nul tel que $a + h \in U$, on a

$$\begin{aligned} 0 \quad \leq \quad & \frac{\|(\lambda f + \mu g)(a+h) - (\lambda f + \mu g)(a) - (\lambda \, \mathrm{d}f(a) + \mu \, \mathrm{d}g(a))(h)\|}{\|h\|} \\ & \leq |\lambda| \, \frac{\|f(a+h) - f(a) - \mathrm{d}f(a)(h)\|}{\|h\|} + |\mu| \, \frac{\|g(a+h) - g(a) - \mathrm{d}g(a)(h)\|}{\|h\|} \\ & \underset{h \to 0_{\mathbb{R}^n}}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

avec $\lambda \, \mathrm{d}f(a) + \mu \, \mathrm{d}g(a) \in \mathcal{L}(E, F)$, ce qui démontre que $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a et $\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \, \mathrm{d}f(a) + \mu \, \mathrm{d}g(a)$. $\square$

Proposition 10. *Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F et $f : U \subset E \longrightarrow F$ de fonctions coordonnées $f_1, \ldots, f_p$ dans la base $\mathcal{B}$. On a équivalence entre :*

(i). f est différentiable,

(ii). les fonctions coordonnées $f_1, \ldots, f_p$ de f sont différentiables.

Dans ce cas, on a

$$\forall a \in U, \quad \forall h \in E, \quad \mathrm{d}f(a)(h) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{d}f_i(a)(h) e_i.$$

Démonstration. Soit $a \in U$ fixé.

- $(i) \Rightarrow (ii)$: Supposons que f est différentiable en a Notons $(\mathrm{d}f(a))_1, \ldots, (\mathrm{d}f(a))_p$ les fonctions coordonnées de $\mathrm{d}f(a)$ dans la base $\mathcal{B}$. Pour tout $h \in E$ tel que $a + h \in U$, on a

$$f(a+h) - f(a) - \mathrm{d}f(a)(h) = \sum_{i=1}^{p} (f_i(a+h) - f_i(a) - (\mathrm{d}f(a))_i(h)) e_i$$

  Par propriétés des limites vectorielles, $\dfrac{1}{\|h\|}(f(a+h) - f(a) - \mathrm{d}f(a)(h))$ tend vers 0_F si et seulement si chacune de ses composantes dans la base $\mathcal{B}$ tend vers 0, ce qui démontre que pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, f_i est différentiable en a (car $(\mathrm{d}f(a))_i$ est linéaire puisque $\mathrm{d}f(a)$ l'est), et que $\mathrm{d}f_i(a) = (\mathrm{d}f(a))_i$.

- $(ii) \Rightarrow (i)$: un raisonnement analogue en sens inverse démontre que si pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, f_i est différentiable en a, il en est de même pour f.

$\square$

Proposition 11. *Soient $F_1, \ldots, F_p$ des espaces vectoriels normés de dimensions finies (non nulles). On note $F = \prod_{i=1}^{p} F_i$. Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$. On peut écrire $f = (f_1, \ldots, f_p)$ avec $f_i : U \subset E \longrightarrow F_i$ les fonctions composantes de f. On a équivalence entre :*

(i). f est différentiable,

(ii). pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, f_i est différentiable.

Dans ce cas, pour tout $a \in U$, $\mathrm{d}f(a) = (\mathrm{d}f_1(a), \ldots, \mathrm{d}f_p(a))$.

Démonstration. Cela résulte encore une fois de la caractérisation des limites pour les fonctions à valeurs dans un espace produit. Soit $a \in U$.

- Supposons que f est différentiable en a. Notons $((\mathrm{d}f(a))_1, \ldots, (\mathrm{d}f(a))_p)$ les fonctions composantes de $\mathrm{d}f(a)$. Pour $h \in E$ tel que $a + h \in U$, on a

  $$f(a+h) - f(a) - \mathrm{d}f(a)(h) = (f_1(a+h) - f_1(a) - (\mathrm{d}f(a))_1(h), \ldots, f_p(a+h) - f_p(a) - (\mathrm{d}f(a))_p(h))$$

  qui tend vers 0_F si et seulement si chacune des composantes tend vers 0_{F_i}. Puisque $(\mathrm{d}f(a))_i$ est linéaire de E dans F_i (car $\mathrm{d}f(a)$ l'est), ceci prouve que f_i est différentiable en a et $\mathrm{d}f_i(a) = (\mathrm{d}f(a))_i$.
- Un raisonnement analogue en sens inverse montre que si pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, f_i est différentiable en a, alors f l'est aussi.

$\square$

Théorème 3 (Différentiation de fonctions composées)**.**
Soient $f : U \subset E \longrightarrow F$, V un ouvert de F tel que $f(U) \subset V$ et $g : V \subset F \longrightarrow G$. Si f est différentiable en $a \in U$ et g différentiable en $f(a) \in V$, la fonction composée $g \circ f : U \subset E \longrightarrow G$ est différentiable en a et

$$\forall h \in E, \quad \mathrm{d}(g \circ f)(a)(h) = \mathrm{d}g(f(a))\Big(\mathrm{d}f(a)(h)\Big).$$

Par suite, si f et g sont différentiables (resp. sur U et V), $g \circ f$ est aussi différentiable et

$$\forall a \in U, \quad \mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a).$$

Démonstration. Soit $a \in U$. On suppose que f est différentiable en a et que g est différentiable en $f(a)$. Il existe alors une fonction ε définie au voisinage de 0_E telle que

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + \|h\|\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(h) \underset{h \to 0_E}{\longrightarrow} 0_F.$$

On peut donc écrire $f(a+h)$ sous la forme

$$f(a+h) = f(a) + h' \quad \text{en posant} \quad h' = \mathrm{d}f(a)(h) + \|h\|\varepsilon(h).$$

Par continuité et linéarité de $\mathrm{d}f(a)$, on remarque que lorsque $h \to 0_E$, $h' \to 0_F$. Comme g est différentiable en $f(a)$, il existe une fonction η définie au voisinage de 0_F vérifiant en particulier

$$g(f(a) + h') = g(f(a)) + \mathrm{d}g(f(a))(h') + \|h'\|\eta(h') \quad \text{avec} \quad \eta(h') \underset{h \to 0_E}{\longrightarrow} 0_G.$$

Par suite, on peut donc écrire

$$\begin{aligned}(g\circ f)(a+h) &= (g\circ f)(a) + \mathrm{d}g(f(a))(\mathrm{d}f(a)(h)) + \|h\|\,\mathrm{d}g(f(a))(\varepsilon(h)) + \|h'\|\eta(h')\\ &= (g\circ f)(a) + (\mathrm{d}g(f(a))\circ \mathrm{d}f(a))(h) + \varphi(h)\end{aligned}$$

avec $\varphi(h) = \|h\|\,\mathrm{d}g(f(a))(\varepsilon(h)) + \|h'\|\eta(h')$. Par continuité de $\mathrm{d}f(a)$, il existe $C \geq 0$ tel que

$$\|\mathrm{d}f(a)(h)\| \leq C\|h\| \quad \text{d'où} \quad \|h'\| = \|\mathrm{d}f(a)(h) + \|h\|\varepsilon(h)\| \leq (C + \|\varepsilon(h)\|)\|h\|,$$

ce qui implique que

$$\|\varphi(h)\| \leq (\|\mathrm{d}g(f(a))(\varepsilon(h))\| + (C + \|\varepsilon(h)\|)\|\eta(h')\|)\|h\|.$$

On a donc au final $\varphi(h) = o(\|h\|)$ lorsque $h \to 0_E$. Puisque la fonction $\mathrm{d}g(f(a))\circ \mathrm{d}f(a)$ appartient à $\mathcal{L}(E,G)$, ceci démontre que $g\circ f$ est différentiable en a et que $\mathrm{d}(g\circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a))\circ \mathrm{d}f(a)$. □

Proposition 12. *Soient $f : U \subset E \longrightarrow F$, $\lambda : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction scalaire et $a \in U$. Si f et λ sont différentiables en a, il en est de même de la fonction λf et on a*

$$\forall h \in E, \quad \mathrm{d}(\lambda f)(a)(h) = \lambda(a)\,\mathrm{d}f(a)(h) + \mathrm{d}\lambda(a)(h)f(a) \quad \textit{i.e.} \quad \mathrm{d}(\lambda f)(a) = \mathrm{d}\lambda(a)f(a) + \lambda(a)\,\mathrm{d}f(a).$$

Démonstration. Le but est de décomposer l'application λf en une composée de fonctions différentiables. Notons $u = (\lambda, f) : x \in U \subset E \longmapsto (\lambda(x), f(x)) \in \mathbb{R}\times F$. Cette application est différentiable en a puisque ses composantes le sont. Notons $\varphi : (\alpha, y) \in \mathbb{R}\times F \longmapsto \alpha y \in F$. On remarque que φ est bilinéaire, donc différentiable. De plus, on a

$$\begin{array}{ccccc} U\subset E & \stackrel{u}{\longrightarrow} & \mathbb{K}\times F & \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} & F\\ x & \longmapsto & (\lambda(x), f(x)) & \longmapsto & \lambda(x)f(x)\end{array}$$

ce qui démontre que $\lambda f = \varphi\circ u$. Ainsi, par composition de fonctions différentiables, λf est différentiable en a et on a

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\lambda f)(a) &= \mathrm{d}(\varphi\circ u)(a)\\ &= \mathrm{d}\varphi(u(a))\circ \mathrm{d}u(a)\\ &= \mathrm{d}\varphi(\lambda(a), f(a))\circ(\mathrm{d}\lambda(a), \mathrm{d}f(a))\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\forall h\in\mathbb{R}^n, \quad \mathrm{d}(\lambda f)(a)(h) &= \mathrm{d}\varphi(\lambda(a), f(a))\Big(\mathrm{d}\lambda(a)(h), \mathrm{d}f(a)(h)\Big)\\ &= \varphi(\lambda(a), \mathrm{d}f(a)(h)) + \varphi(\mathrm{d}\lambda(a)(h), f(a))\\ &= \lambda(a)\,\mathrm{d}f(a)(h) + \mathrm{d}\lambda(a)(h)f(a).\end{aligned}$$

□

Exemple :

1. Les fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ sont différentiables.
2. La fonction det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est différentiable comme somme et produit de fonctions différentiables.
3. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x+y, xy)$ est différentiable puisque ses fonctions composantes le sont.