Chapitre 5

Continuité des fonctions vectorielles

Dans tout le chapitre, E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés (pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) par $\| \, . \, \|_E$ et $\| \, . \, \|_F$. Les notions qui vont suivre sont invariantes par passage à une norme équivalente. En particulier, elles ne dépendent pas de la norme lorsque les espaces sont de dimensions finies.

X désigne une partie de E. On s'intéresse ici aux applications $f : X \subset E \longrightarrow F$.

Les notions qui vont suivre ont déjà été vues lors du semestre 3, dans le cadre de fonctions allant de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Les seules différences par rapport à ce que l'on a déjà fait proviendront du fait que l'on ne prend plus forcément la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ mais une norme $\| \, . \, \|_E$ sur E et une norme $\| \, . \, \|_F$ sur F, et que les espaces vectoriels E et F n'ont pas forcément de bases canoniques.

5.1 Limites

5.1.1 Convergences

Définition 1. *Soient $f : X \subset E \longrightarrow F$ et a un point adhérent à X. On dit que f* ***tend vers*** *$\ell \in F$ en a si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

Cet élément ℓ est alors unique, et on note $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

Démonstration. Supposons que f tende vers ℓ et ℓ' en a. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors η et $\eta' > 0$ tels que

$$\forall x \in X, \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon$$

et

$$\forall x \in X, \|x - a\|_E \leq \eta' \Rightarrow \|f(x) - \ell'\|_F \leq \varepsilon.$$

Pour $x \in X$ vérifiant $\|x - a\|_E \leq \min(\eta, \eta')$ (il en existe au moins un puisque a est adhérent à X), on obtient

$$\begin{aligned} \|\ell - \ell'\|_E &= \|\ell - f(x) + f(x) - \ell'\| \\ &\leq \|\ell - f(x)\|_E + \|f(x) - \ell'\|_E \text{ par inégalité triangulaire} \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit $\|\ell - \ell'\|_E = 0$ et donc $\ell = \ell'$. □

Remarque. De manière équivalente, on peut remplacer les deux inégalités larges dans la définition de la limite par deux inégalités strictes. En effet,

- Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in X$, $\|x-a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x)-\ell\|_F \leq \varepsilon$. Soit $\varepsilon > 0$. On applique le résultat énoncé avec $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$. Alors en particulier, pour tout $x \in X$,
$$\|x-a\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x)-\ell\|_F \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$
- Réciproquement, supposons la propriété avec les inégalités strictes. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in X$, $\|x-a\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x)-\ell\|_F < \varepsilon \leq \varepsilon$. On peut alors poser $\eta' = \dfrac{\eta}{2}$ de manière à obtenir le résultat voulu.

Théorème 1 (Caractérisation séquentielle)**.**
Soient $f : X \subset E \longrightarrow F$, $\ell \in F$ et a un point adhérent à X. On a équivalence entre

(i). $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$,

(ii). $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \Rightarrow f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Démonstration. Preuve à comprendre

- $(i) \Rightarrow (ii)$: Supposons que f tend vers ℓ en a. Soit $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a, on veut montrer que $(f(x_n))_n$ converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que
$$\forall x \in X, \quad \|x-a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x)-\ell\|_F.$$
Puisque la suite $(x_n)_n$ converge vers a et $\eta > 0$, par définition de la convergence, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geq n_0, \quad \|x_n - a\|_E \leq \eta.$$
Par suite, pour tout $n \geq n_0$, on a $\|f(x_n)-\ell\|_F \leq \varepsilon$, ce qui démontre que $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
- $(ii) \Rightarrow (i)$: on raisonne par l'absurde. Supposons que pour toute suite $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a, on a $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et que f ne tend pas vers ℓ en a. Alors (en niant la définition de f tend vers ℓ en a) il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que
$$\forall \eta > 0, \quad \exists x \in X, \quad \|x-a\|_E \leq \eta \text{ et } \|f(x)-\ell\|_F > \varepsilon_0.$$
Soit $n \in \mathbb{N}$, pour $\eta = \dfrac{1}{n+1} > 0$, on peut donc trouver un élément $x_n \in X$ tel que $\|x_n - a\|_E \leq \dfrac{1}{n+1}$ et $\|f(x_n)-\ell\|_F > \varepsilon_0$. En faisant varier n, on construit ainsi une suite $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a (car $\|x_n - a\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$) telle que $(f(x_n))_n$ ne converge pas vers ℓ, ce qui est absurde.

□

5.1.2 Opérations sur les limites

Grâce à la caractérisation séquentielle des limites et aux opérations sur les suites vectorielles convergentes, on obtient les propriétés suivantes. Soit a un point adhérent à X.

Proposition 1. *Soient $f, g : X \subset E \longrightarrow F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell'$, alors $(\lambda f + \mu g)(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda\ell + \mu\ell'$.*

Démonstration. Soit $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ de limite a. On sait que $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$. Par opération sur les suites vectorielles convergentes, on en déduit que $(\lambda f + \mu g)(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\ell + \mu\ell'$. Ceci étant valable pour toute suite $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a, la caractérisation séquentielle des limites entraîne que $\lambda f + \mu g$ tend vers $\lambda\ell + \mu\ell'$ en a. □

Proposition 2. *Soient $\alpha : X \subset E \longrightarrow \mathbb{K}$ et $f : X \subset E \longrightarrow F$. Si $\alpha(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{K}$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, alors $(\alpha f)(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda\ell$.*

Démonstration. Par caractérisation séquentielle des limites et opérations sur les suites vectorielles. □

Proposition 3 (Composition des limites)**.**
Soient G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $f : X \subset E \longrightarrow F$ et $g : Y \subset F \longrightarrow G$ avec $f(X) \subset Y$. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$ et $g(y) \underset{y\to b}{\longrightarrow} \ell$, alors $g \circ f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Démonstration. On utilise encore la caractérisation séquentielle des limites. Remarquons aussi que b est adhérent à Y puisque $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ est adhérent à $f(X)$ et $f(X) \subset Y$. Soit $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ de limite a. Comme $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$, la suite $(y_n)_n \in Y^{\mathbb{N}}$ définie par $y_n = f(x_n)$ est une suite d'éléments de Y convergeant vers b, ce qui entraîne que $(g(f(x_n)))_n$ converge vers ℓ, d'où le résultat. □

5.1.3 Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F. Considérons $f : X \subset E \longrightarrow F$. Pour tout $x \in E$, on peut écrire

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} f_j(x)e_j \qquad \text{avec } f_j(x) \in \mathbb{K} \quad \forall j \in [\![1;p]\!].$$

Définition 2. *Les applications scalaires $f_1, \ldots, f_p$ sont appelées* ***fonctions coordonnées (ou composantes)*** *de f relatives à la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$.*

Remarque. On avait déjà parlé de fonctions coordonnées (sans parler de base) dans le cas de fonctions $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ en écrivant, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$ avec $f_j(x) \in \mathbb{R}$ pour $j \in [\![1;p]\!]$. Par la définition ci-dessus, les fonctions $f_1, \ldots, f_p$ correspondent aux fonctions coordonnées de f relatives à la base canonique de $\mathbb{R}^p$ (qui est la base "naturelle" sur $\mathbb{R}^p$).

Par la proposition ci-dessous, on retrouve la notion de convergence coordonnée par coordonnée (ou composante par composante), mais cela se fait relativement à la base $\mathcal{B}$ de F choisie.

Proposition 4. *Soit a un point adhérent à X, $\ell_1, \ldots, \ell_p \in \mathbb{K}$. On a équivalence entre :*

(i). f tend vers $\ell = \sum\limits_{j=1}^{p} \ell_j e_j$ en a,

(*ii*). *pour tout* $j \in [\![1;p]\!]$, f_j *tend vers* ℓ_j *en* a.

Démonstration. Toujours par caractérisation séquentielle de la limite. □

Remarque. En cas de convergence, on a donc

$$\lim_{x \to a} f(x) = \sum_{j=1}^{p} \lim_{x \to a} f_j(x) e_j.$$

5.1.4 Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé produit

Soient $F_1, \dots, F_p$ des espaces vectoriels normés respectivement par $N_1, \dots, N_p$ et $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ l'espace vectoriel normé produit muni de la norme infinie :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_p) \in F, \quad \|x\| = \max\{N_i(x_i) \mid i \in [\![1;p]\!]\}.$$

Considérons $f : X \subset E \longrightarrow F$. Pour tout $x \in F$, on peut écrire $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ avec $f_i(x) \in F_i$. Les applications $f_1, \dots, f_p$ sont appelées applications coordonnées ou composantes de f.

Proposition 5. *Soit* $a \in E$ *un point adhérent à* X. *On a équivalence entre :*

(*i*). f *tend vers* $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ *en* a,

(*ii*). *pour tout* $i \in [\![1;p]\!]$, f_i *tend vers* ℓ_i *en* a.

Démonstration. Toujours par la caractérisation séquentielle de la limite et les propriétés des suites vectorielles à valeurs dans un espace produit (cf chapitre 3.) □

5.1.5 Extension "à l'infini"

Définition 3. *Soit* $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow F$ *avec* X *une partie de* $\mathbb{R}$ *non majorée. On dit que* f *tend vers* $\ell \in F$ *en* $+\infty$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in X, \quad x \geq A \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$. *On définit de manière analogue* $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \ell$, *pour* $X \subset \mathbb{R}$ *non minorée.*

Définition 4. *Soit* $f : X \subset E \longrightarrow F$ *avec* X *une partie de* E *non bornée. On dit que* f *tend vers* $\ell \in F$ *lorsque* $\|x\|_E \to +\infty$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in X, \quad \|x\|_E \geq A \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \underset{\|x\|_E \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Définition 5. *Soit* $f : X \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* a *un point adhérent à* X. *On dit que* f *tend vers* $+\infty$ *en* a *si*

$$\forall M \in \mathbb{R}^+, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq M.$$

On note alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$. *On définit de manière analogue* $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$, $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, *etc...*

5.2 Continuité

5.2.1 Définitions et exemples

Définition 6. *On dit que $f : X \subset E \longrightarrow F$ est* ***continue*** *en $a \in X$ si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$, i.e. si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon.$$

Remarque. Si $f : X \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^p$, on peut remplacer $\| \,.\, \|_E$ et $\| \,.\, \|_F$ par n'importe quelle norme sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^p$ respectivement puisque les normes sont équivalentes dans un espace vectoriel de dimension finie.

En vertu de la caractérisation séquentielle des limites, on peut caractériser la continuité comme ci-dessous.

Théorème 2. *Soient $f : X \subset E \longrightarrow F$ et $a \in X$. On a équivalence entre :*

(i). f est continue en a,

(ii). $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, \quad \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$.

Définition 7. *On dit que $f : X \subset E \longrightarrow F$ est* ***continue*** *sur X si f est continue en tout point $a \in X$. On note $\mathcal{C}(X, F)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans F.*

Remarque. Il faut faire attention lorsque l'on manipule des restrictions. Si $f : X \subset E \longrightarrow F$ est continue sur X, la restriction $f_{|_Y}$ l'est en particulier sur Y pour tout $Y \subset X$, mais la réciproque est fausse, comme on l'a déjà vu au semestre précédent. Pour que la réciproque soit vraie, il faut que l'ensemble de restriction soit ouvert.

Proposition 6. *Soit $f : X \subset E \longrightarrow F$ et $U \subset X$ un ouvert de E. Si la restriction de f à U, notée $f_{|_U}$, est continue sur U, alors f est continue en tout point de U.*

Démonstration. Comme U est ouvert, pour tout point $y \in U$, on peut trouver une boule ouverte $B(y, r)$ incluse dans U. Pour tout $\varepsilon > 0$, en prenant $\eta' = \min(r, \eta)$, on a alors

$$\forall x \in X, \quad \|x - y\|_E \leq \eta' \Rightarrow x \in U \text{ et } \|x - y\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f_{|_U}(x) - f_{|_U}(y)\|_F = \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon$$

ce qui démontre la continuité de f en tout point de U. □

Exercice : déterminer l'ensemble des points de continuité de $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(y) - \sin(x)}{y - x} & \text{si } x \neq y \\ \cos(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Correction : Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

- Cas $x_0 \neq y_0$: puisque l'ensemble $\mathcal{O} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (son complémentaire $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ étant fermé par caractérisation séquentielle des fermés), il existe une boule ouverte B centrée en (x_0, y_0) incluse dans $\mathcal{O}$. Pour tout $(x,y) \in B$, on a

  $$f(x,y) = \frac{\sin(y) - \sin(x)}{y - x} \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} \frac{\sin(y_0) - \sin(x_0)}{y_0 - x_0} = f(x_0, y_0) \text{ par opérations sur les limites}$$

  ce qui démontre que f est continue en (x_0, y_0).
  On aurait aussi pu dire que sur l'ouvert $\mathcal{O}$, la fonction f est le quotient de la fonction $(x,y) \longmapsto \sin(y) - \sin(x)$ par $(x,y) \longmapsto y - x$ qui ne s'annule pas sur $\mathcal{O}$ et expliquer comme au S3 que ces fonctions sont continues par composées et sommes de fonctions continues.
- Cas $x_0 = y_0$: on ne peut pas trouver de boule centrée en (x_0, y_0) incluse dans l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq y$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $z_{x,y}$ compris strictement entre x et y tel que $\sin(y) - \sin(x) = \cos(z_{x,y})(y - x)$, ce qui entraîne

  $$f(x,y) = \frac{\cos(z_{x,y})(y-x)}{(y-x)} = \cos(z_{x,y}) \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} \cos(x_0) = f(x_0, y_0) \text{ par continuité de } \cos \text{ sur } \mathbb{R}.$$

  Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $\eta_1 > 0$ tel que

  $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq y, \quad \|(x,y) - (x_0,y_0)\| \leq \eta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

  De plus, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $x = y$, on a $f(x,y) = \cos(x) \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} \cos(x_0) = f(x_0, y_0)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $\eta_2 > 0$ tel que

  $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x = y, \quad \|(x,y) - (x_0,y_0)\| \leq \eta_2 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

  En regroupant ces deux informations, on obtient ainsi

  $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta = \min(\eta_1, \eta_2) > 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \|(x,y) - (x_0,y_0)\| \leq \eta \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq \varepsilon$$

  ce qui démontre la continuité de $\mathbb{R}^2$ en (x_0, y_0) tel que $x_0 = y_0$, entraînant la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

Il existe une catégorie de fonctions qui sont toujours continues sur leur domaine de définition.

Définition 8. *Une application $f : X \subset E \longrightarrow F$ est dite* ***lipschitzienne*** *s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que*

$$\forall x, y \in X, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E.$$

Exemple : L'application $x \longmapsto \|x\|_E$ est lipschitzienne de E vers $\mathbb{R}$. En effet, pour tous $x, y \in E$, on a $|\|x\|_E - \|y\|_E| \leq \|x - y\|$.

Proposition 7. *Les applications lipschitziennes sont continues.*

Démonstration. : preuve à savoir refaire Soit $f : X \subset E \longrightarrow F$ une application lipschitzienne. Il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x, y \in X, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E.$$

Si $k = 0$, il est clair que la fonction f est constante donc continue. Sinon, soient $a \in X$ et $\varepsilon > 0$ fixé. En posant $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$, on obtient :

$$\forall x \in X, \quad \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leq k\|x - a\|_E \leq \varepsilon$$

ce qui démontre la continuité de f en a. □

Exemple à connaître (cf S3) : soient $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ des espaces vectoriels normés et $(E, \|\,.\,\|)$ l'espace normé produit (muni de la norme infinie). Pour $i \in [\![1;p]\!]$, on définit

$$p_i : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E_i \\ x = (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

L'application p_i est la i-ième projection coordonnée. Pour tous $x = (x_1, \dots, x_p)$, $y = (y_1, \dots, y_p) \in E$, on a

$$N_i(p_i(x) - p_i(y)) = N_i(x_i - y_i) \leq \|x - y\|$$

ce qui démontre que l'application p_i est 1-lipschitzienne donc continue sur E. En particulier, les applications suivantes sont continues :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$$

5.2.2 Opérations sur les fonctions continues

Par opérations sur les limites, on démontre que la somme, le produit par une fonction scalaire continue, la composée de deux fonctions continues est continue.

Proposition 8. *Soient $f, g : X \subset E \longrightarrow F$ continues et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur X.*

Proposition 9. *Soient $\alpha : X \subset E \longrightarrow \mathbb{K}$ et $f : X \subset E \longrightarrow F$ continues sur X. Le produit $\alpha \cdot f$ est continu sur X.*

Exemples : on appelle fonction monôme sur $\mathbb{K}^p$ toute fonction de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & x_1^{\alpha_1} \times \cdots \times x_p^{\alpha_p} \end{array}$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}$. Puisque les projections coordonnées sont continues, les fonctions monômes sont continues sur $\mathbb{K}^p$. On appelle fonction polynômiale sur $\mathbb{K}^p$ toute combinaison linéaire de monômes. D'après les deux propositions ci-dessus, les fonctions polynômiales sont continues sur $\mathbb{K}^p$.

Proposition 10. *Soient $f : X \subset E \longrightarrow F$ et $g : Y \subset F \longrightarrow G$ vérifiant $f(X) \subset Y$. Si f et g sont continues, la composée $g \circ f$ est continue sur X.*

Exemple : La fonction $x \in E \longmapsto \dfrac{1}{\|x\|_E}$ est continue sur $E \backslash \{0_E\}$ comme composée de la fonction $\|\,.\,\|_E$ continue sur E avec la fonction inverse continue sur $\mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Remarque. Attention : si une fonction bijective est continue, sa réciproque ne l'est pas forcément. En effet, la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [0; 2\pi[& \longrightarrow & \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array}$$

est continue, bijective, mais sa réciproque vérifie :

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ \mathrm{Im}(z) > 0}} f^{-1}(z) = 0 \quad \text{alors que} \quad \lim_{\substack{z \to 1 \\ \mathrm{Im}(z) < 0}} f^{-1}(z) = 2\pi.$$

5.2.3 Continuité pour une fonction à valeurs dans un espace normé de dimension finie ou dans un espace produit

Proposition 11. *Si F est de dimension finie, alors $f : X \subset E \longrightarrow F$ est continue si et seulement si ses fonctions coordonnées dans une base de F le sont.*

Démonstration. Provient de la convergence en dimension finie. □

Exemple : la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(t) = e^{it}$ est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, dont $(1, i)$ est une base. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on peut écrire $f(t) = \cos(t) + i\sin(t)$. Comme les fonctions coordonnées de f dans la base $(1, i)$, à savoir cosinus et sinus, sont continues sur $\mathbb{R}$, il en est de même pour f.

Proposition 12. *Soit $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ un espace normé produit, et $f : X \subset E \longrightarrow F$. On peut noter $f = (f_1, \ldots, f_p)$ avec $f_i : X \subset E \longrightarrow F_i$ pour tout $i \in [\![1; p]\!]$. La fonction f est continue sur X si et seulement si ses composantes f_i le sont.*

Démonstration. Provient de la convergence à valeurs dans un espace normé produit. □

Remarque. En particulier, cela s'applique à toute fonction $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On peut décomposer f sous la forme $f = (f_1, \ldots, f_p)$ avec $f_i : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$. On a alors l'équivalence : f est continue sur $\mathbb{R}^d$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1; d]\!]$ la fonction f_i est continue sur $\mathbb{R}^d$.

Cf exemples vus en TD au semestre 3.