**Université Claude Bernard - Lyon 1** Semestre d'automne 2021-2022

Analyse III Durée : 2 heures

---

**Examen final du vendredi 7 janvier 2022**

---

*Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.*

*Les six exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.*

**Questions de cours :** (on ne demande pas de démonstration, seuls les énoncés sont attendus)

1. On considère deux fonctions $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $g = (g_1, g_2, g_3) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de classe $C^1$. Exprimer les dérivées partielles de $f \circ g$ en fonction de celles de $f$ et $g$.
2. Pour quelles valeurs du réel $a$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$ est-elle convergente ?

**Exercice 1.** Les trois questions sont indépendantes.

1. Pour quelles valeurs du réel $a$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^a}$ est-elle convergente ?
2. Étudier la convergence de la série
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\ln(n^2+3)\sqrt{4^n+1}}{4^n}.$$
3. Étudier la convergence de la série
$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

**Exercice 2.** Montrer que la fonction $f : (x, y) \longmapsto \dfrac{xy^2 + y^2}{x^2 + y^2}$ n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

**Exercice 3.** On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(y + x^2\right)^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Justifier brièvement la continuité de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Montrer que $f$ est continue en $(0, 0)$.
3. Étudier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et déterminer sa valeur si elle existe.

**Exercice 4.** Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2+1}\mathrm{dt}.$
2. $\displaystyle\int_1^{3} \frac{\sqrt{\ln(t)}}{(t-1)^2\sqrt{t}}\mathrm{dt}.$

**Exercice 5.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [-1;1], \quad f_n(x) = \frac{1}{x^2+1}\sqrt{x^2 + \frac{1}{n} + x^{4n}}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[-1;1]$ vers une fonction $f$ que l'on précisera.
2. Justifier que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers $f$ sur $[-1;1]$.
3. Soit $a \in ]0;1[$.
   (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-a;a]$. Montrer que $f_n(x) - f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}\dfrac{\frac{1}{n} + x^{4n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n} + x^{4n}} + \sqrt{x^2}}$.
   (b) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $f$ sur $[-a;a]$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier la dérivabilité de $f_n$ sur $]-1;1[$ et étudier la dérivabilité de $f$ sur $]-1;1[$.
5. Soit $a \in ]0;1[$. Montrer que la suite de fonctions $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $[-a;a]$.

**Exercice 6.** Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $F$ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $F$ est continue sur $\mathbb{R}$. Indication : on pourra commencer par montrer que la restriction de $F$ est continue sur $]-a,a[$ (ou $[-a;a]$) pour tout $a > 0$.
3. Montrer que $F$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et exprimer $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale pour $x \in ]0;+\infty[$.

## Correction de l'examen final (session 1) d'analyse iii de 2021-2022

**Correction de l'exercice 1**

1. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a}$. Si $a < 0$, alors $|u_n| = \dfrac{1}{n^a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0, ainsi la série $\sum u_n$ diverge grossièrement. De même, si $a = 0$, alors $|u_n| = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0$, donc $\sum u_n$ diverge aussi grossièrement. Supposons donc $a > 0$, alors la série $\sum u_n$ est alternée puisque $(-1)^n u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, $|u_n| = \dfrac{1}{n^a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante puisque comme $a$ est positif, la croissance de la fonction $t \longmapsto t^a$ sur $\mathbb{R}^+$ entraîne
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1) \geq n \Rightarrow (n+1)^a \geq n^a \Rightarrow \frac{1}{(n+1)^a} \leq \frac{1}{n^a}.$$
Par le critère des séries alternées, on en déduit que la série $\sum u_n$ converge.

2. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{\ln(n^2+3)\sqrt{4^n+1}}{4^n}$. On remarque que pour tout $n$, $v_n > 0$, on peut donc essayer d'utiliser la règle de d'Alembert par exemple
$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\ln((n+1)^2+3)\sqrt{4^{n+1}+1}}{4^{n+1}} \frac{4^n}{\ln(n^2+3)\sqrt{4^n+1}} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n^2 \sqrt{4^{n+1}}}{4\ln(n^2)\sqrt{4^n}} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4}}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$
Ainsi, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2} < 1$ donc la série $\sum v_n$ converge.

3. Puisque $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $\dfrac{1}{n}$ tendent vers 0 lorsque $n \to +\infty$, on peut utiliser les développements limités usuels afin de déterminer un équivalent de $w_n = \cos(1/\sqrt{n}) - 1 + \sin(1/n)$. On obtient, lorsque $n \to +\infty$,
$$\begin{aligned} w_n &= 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n} \geq 0 \end{aligned}$$
Par comparaison de séries à termes positifs (au moins à partir d'un certain rang), comme la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, il en est de même de la série $\sum w_n$.

**Correction de l'exercice 2** Tout d'abord, la fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. De plus, pour $x \neq 0$, on a
$$f(x,0) = 0 \underset{(x,0)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$
et pour $y \neq 0$,
$$f(0,y) = \frac{y^2}{y^2} = 1 \underset{(0,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 1 \neq 0.$$
Comme $f$ admet deux limites différentes en $(0,0)$ selon deux directions différentes, $f$ n'admet pas de limite en $(0,0)$.

**Correction de l'exercice 3**

1. Sur l'**ouvert** $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, la fonction $f$ est donnée par $(x,y) \longmapsto \left(y+x^2\right)^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ *i.e* $f_{|\mathcal{U}} = g \times \sin \circ \dfrac{1}{\sqrt{}} \circ h$ où

$$g: \begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (y+x^2)^2 \end{array} \quad \text{et} \quad h: \begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array}$$

sont polynomiales donc continues sur $\mathcal{U}$. Puisque $h$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, que la fonction d'une seule variable réelle $\dfrac{1}{\sqrt{}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et que sin est continue sur $\mathbb{R}$, par produit et composition de fonctions continues, $f_{|\mathcal{U}}$ est continue sur $\mathcal{U}$. Puisque $\mathcal{U}$ est un ouvert, on en déduit que $f$ est continue sur $\mathcal{U}$.

2. On a $f(0,0) = 0$. Soit $(x,y) \in \mathcal{U}$, il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Alors

$$\begin{aligned} 0 \le |f(x,y)| = \left|(r\sin(\theta)+r^2\cos(\theta)^2)^2 \sin\left(\frac{1}{r^2}\right)\right| &= (r\sin(\theta)+r^2\cos(\theta)^2)^2 \left|\sin\left(\frac{1}{r^2}\right)\right| \\ &\le (r\sin(\theta)+r^2\cos^2(\theta))^2 \text{ car } \forall u \in \mathbb{R}, |\sin(u)| \le 1 \\ &\le (r+r^2)^2 \end{aligned}$$

puisque $\left|r\sin\theta + r^2\cos^2\theta\right| \le r|\sin\theta| + r^2\cos^2\theta \le r + r^2$ et en exploitant la croissance de $t \longmapsto t^2$ sur $\mathbb{R}^+$. (Remarquons que la majoration est aussi valable pour $(x,y) = (0,0)$.) La majoration obtenue étant indépendante de $\theta$, et puisque $r = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$, le théorème des gendarmes donne grâce à l'encadrement ci-dessus :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

donc $f$ est continue en $(0,0)$.

3. On sait que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe si, et seulement si, $\dfrac{1}{t}(f(0,t)-f(0,0))$ admet une limite finie $\ell$ lorsque $t \to 0$ (avec $t \neq 0$). Dans ce cas, elle est égale à $\ell$. Soit $t \in \mathbb{R}^*$, alors

$$\frac{1}{t}(f(0,t)-f(0,0)) = \frac{1}{t}(t^2\sin(1/\sqrt{t^2}) - 0) = t\sin(1/|t|) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

puisque $0 \le |t\sin(1/|t|)| \le |t| \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. Par suite, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0.

**Correction de l'exercice 4**

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\cos(t)}{t^2+1}$. La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}^+$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$|f(t)| \le \frac{1}{t^2+1} \le \frac{1}{t^2}$$

avec $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ intégrable sur $[a;+\infty[$ pour $a > 0$ par la règle de Riemann (car $2 > 1$). Par suite, $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente (même absolument convergente).

2. Soit $g : ]1;3] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = \dfrac{\sqrt{\ln(t)}}{(t-1)^2\sqrt{t}}$. La fonction $g$ est continue sur $]1;3]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, donc elle est intégrable sur tout segment $[a;3]$ inclus dans $]1;3]$. Étudions l'intégrabilité de $g$ au voisinage de 1. Effectuons le changement de variable $u = t-1,\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t$. Par le théorème de changement de variable, les intégrales

$$\int_1^3 g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^2 \frac{\sqrt{\ln(1+u)}}{u^2\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u$$

sont de même nature (et sont égales en cas de convergence). On est donc ramené à étudier l'intégrabilité de $h : u \longmapsto \dfrac{\sqrt{\ln(1+u)}}{u^2\sqrt{1+u}}$ au voisinage de 0. Par les équivalents usuels,

$$h(u) \underset{u\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{u}}{u^2} = \frac{1}{u^{3/2}}$$

Or la fonction de Riemann $u \longmapsto \dfrac{1}{u^{3/2}}$ n'est pas intégrable au voisinage de 0 car $3/2 \geq 1$, donc par comparaison de fonctions positives, il en est de même de $h$, ce qui prouve que $h$ n'est pas intégrable sur $]0;2]$. Comme la fonction $h$ est à valeurs positives sur $]1;2]$, l'intégrabilité de $h$ sur $]0;2]$ est équivalente à la convergence de $\displaystyle\int_0^2 h(u)\,\mathrm{d}u$. Finalement, l'intégale $\displaystyle\int_0^2 h(u)\,\mathrm{d}u$ diverge, donc il en est de même de $\displaystyle\int_1^3 g(t)\,\mathrm{d}t$.

**Correction de l'exercice 5**

1. Soit $x \in ]-1;1[$, alors $0 \leq x^4 < 1$ donc $x^{4n} = (x^4)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Comme $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x^2+1}$. Si $x=1$ ou $x=-1$, alors $x^{4n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Par suite, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x^2+1} & \text{si } x \in ]-1;1[ \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{si } x \in \{-1;1\} \end{cases}$$

2. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n$ est continue sur $[-1;1]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Sa limite simple $f$ n'est pas continue en 1 ou en $-1$, puisque

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\sqrt{x^2}}{x^2+1} = \frac{1}{2} \neq f(1).$$

Puisque la convergence uniforme préserve la continuité, la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne peut pas converger uniformément vers $f$ sur $[-1;1]$.

3. (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-a;a]$. On a

$$\begin{aligned} f_n(x) - f(x) &= \frac{1}{x^2+1}\sqrt{x^2+\frac{1}{n}+x^{4n}} - \frac{1}{x^2+1}\sqrt{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n}+x^{4n}} - \sqrt{x^2}\right)\frac{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}+x^{4n}}+\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}+x^{4n}}+\sqrt{x^2}} \\ &= \frac{1}{x^2+1}\frac{x^2+\frac{1}{n}+x^{4n}-x^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}+x^{4n}}+\sqrt{x^2}} \\ &= \frac{1}{x^2+1}\frac{\frac{1}{n}+x^{4n}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}+x^{4n}}+\sqrt{x^2}} \end{aligned}$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [-a;a]$, on peut écrire

$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) - f(x) = \frac{1}{x^2+1}\frac{\frac{1}{n}+x^{4n}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}+x^{4n}}+\sqrt{x^2}}.$$

   Par ailleurs, comme $x^2 \geq 0$, on a $\dfrac{1}{x^2+1} \leq 1$, de même

$$\sqrt{\underbrace{x^2}_{\geq 0}+\frac{1}{n}+\underbrace{x^{4n}}_{\geq 0}}+\underbrace{\sqrt{x^2}}_{\geq 0} \geq \sqrt{\frac{1}{n}} > 0$$

et $0 \leq x^4 \leq a^4$ donc $0 \leq x^{4n} \leq a^{4n}$ par croissance de la fonction $t \longmapsto t^n$ sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit la majoration indépendante de $x$ :

$$\forall x \in [-a;a], \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\frac{1}{n} + a^{4n}}{1/\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}a^{4n}.$$

Ainsi la fonction $f_n - f$ est bornée sur $[-a;a]$, et puisque la borne supérieure d'un ensemble est le plus petit des majorants de cet ensemble,

$$0 \leq \|f_n - f\|_{\infty;[-a;a]} = \sup_{x\in[-a;a]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}a^{4n}.$$

Comme $|a| < 1$, par croissances comparées, $\sqrt{n}a^{4n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et le théorème des gendarmes permet de conclure que $\|f_n - f\|_{\infty;[-a;a]}$ converge vers 0. Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f$ sur $[-a;a]$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque la fonction $\sqrt{\ }$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, que la fonction $x \longmapsto x^2 + \frac{1}{n} + x^{4n}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;1[$ et à valeurs strictement positives, on en déduit que la fonction $f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc dérivable sur $]-1;1[$ comme composée et quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
Sur $]-1;1[$, $f$ est donnée par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$. Par opérations, $f$ est dérivable sur $]-1;0[\cup]0;1[$. Étudions sa dérivabilité en 0. Soit $x \in ]-1;1[\setminus\{0\}$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\sqrt{x^2}}{x^2+1} - 0}{x - 0} = \frac{|x|}{x(x^2+1)}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2+1} = 1 \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x^2+1} = -1$$

donc la fonction $f$ n'est pas dérivable en 0.

5. Supposons par l'absurde que la suite de fonctions $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-a;a]$ vers une fonction $g$. Comme on a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a;a]$, que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur $[-a;a]$ vers $f$, les trois hypothèses du théorème de dérivation sont vérifiées et entraînent que la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a;a]$ (de dérivée $f' = g$). Ceci est contradictoire puisque $f$ n'est pas dérivable en 0, donc la suite de fonctions $(f_n')_n$ ne peut pas converger uniformément sur $[-a;a]$.

**Correction de l'exercice 6**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $g_x : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g_x(t) = \dfrac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2}$. La fonction $g_x$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs positives, donc intégrable sur tout segment de la forme $[0;a]$ avec $a > 0$. Déterminons un équivalent de $g_x$ en $+\infty$, pour cela, on va supposer $x \neq 0$, alors

$$g_x(t) = \frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(x^2t^2)}{t^2} = \frac{2\ln(x) + 2\ln(t)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln(t)}{t^2} = \frac{2}{t^2(\ln t)^{-1}}.$$

Par la règle de Bertrand, puisque $2 > 1$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2(\ln t)^{-1}}$ est intégrable sur $[a;+\infty[$ pour tout $a > 1$. Par suite, $g_x$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Par ailleurs, si $x = 0$, la fonction $g_x = g_0$ est la fonction nulle, qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_0(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi, $F(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Posons $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \dfrac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2}$ de sorte que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

   On peut écrire $f = \dfrac{\ln \circ g}{h}$ avec

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ (x,t) & \longmapsto & 1+x^2t^2 \end{array} \quad \text{et} \quad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ (x,t) & \longmapsto & 1+t^2 \end{array}$$

   polynomiales donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$. Comme ln est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, donc en particulier continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$.

   De plus, pour tout $a > 0$, $\forall x \in [-a;a]$, $0 \leq x^2 \leq a^2$ donc par croissance de la fonction ln sur $]0;+\infty[$

$$\forall (x,t) \in [-a;a]\times\mathbb{R}^+, \quad |f(x,t)| \leq \frac{\ln(1+a^2t^2)}{1+t^2} = g_a(t)$$

   avec $g_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ par la première question. Puisque tout segment de $\mathbb{R}$ peut être inclus dans un segment de la forme $[-a;a]$ avec $a > 0$, le corollaire du théorème de continuité par domination permet de démontrer que $F$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3. On a déjà démontré les deux premières hypothèses du (corollaire du) théorème de dérivabilité par domination. Puisque la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, elle est en particulier de classe $\mathcal{C}^1$, donc elle admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ qui est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ avec

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{2xt^2}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}.$$

   Soit $[a;b] \subset ]0;+\infty[$. Pour tout $(x,t) \in [a;b]\times\mathbb{R}^+$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{2xt^2}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} \leq \frac{2bt^2}{(1+t^2)(1+a^2t^2)} := \varphi_{a,b}(t)$$

   avec $\varphi_{a;b} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ continue (donc continue par morceaux) sur $\mathbb{R}^+$ donc intégrable sur $[0;c]$ pour tout $c > 0$ et

$$\varphi_{a,b}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2bt^2}{t^2\times a^2t^2} = \frac{2b}{a^2t^2}$$

   donc $\varphi_{a,b}$ est intégrable sur $[c;+\infty[$ par comparaison à une fonction de Riemann. Par le (corollaire du) théorème de dérivation par domination, on en déduit que la fonction $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et

$$\forall x > 0, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2xt^2}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\,\mathrm{d}t.$$