Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2022-2023

Analyse 3 Durée : 1 heure 30

Session 2 - Examen final du 21 juin 2023

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Les 4 exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Question de cours : Énoncer avec précision le théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions.

Exercice 1. Déterminer la nature (convergence/divergence) des séries de termes généraux suivants. En cas de convergence, on précisera s'il y a convergence absolue ou non.

1. $v_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$
2. $v_n = \dfrac{(n!)^2}{n^3(2n)!}$
3. $v_n = (-1)^n\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right)$
4. $v_n = \sqrt{\dfrac{\ln(1+3^n)}{n^2\ln(3n)}}$

Exercice 2. Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $\alpha > 0$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ soit convergente.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right)\mathrm{d}t$ converge et la calculer.

   Indication : on pourra commencer par calculer $\displaystyle\int_1^{T} \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ *pour* $T > 1$ *par intégration par parties.*

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $u_n : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par

$$u_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple de la **suite** de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.
2. La suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?
3. Montrer que le domaine de définition de la fonction somme $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est $\mathbb{R}^*$.
4. Déterminer si la **série** de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^*$.
5. Étudier l'existence de la limite de la fonction S en $+\infty$, et la calculer si elle existe.
6. À l'aide d'en encadrement série-intégrale, montrer que S admet une limite en 0 et la déterminer.

Exercice 4. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence fini R. Soit maintenant $\sum b_n z^n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}$. On note R' son rayon de convergence. Le but de l'exercice est de montrer que $R' = \max\{1, R\}$.

1. Justifier que $|b_n| \leq |a_n|$ pour tout n et en déduire que $R' \geq R$.
2. De même, montrer que $R' \geq 1$.
3. Montrer que si $R' = 1$ alors $R' = \max\{1, R\}$.
4. Supposons que $R' > 1$.
   (a) Étudier la convergence de la série numérique $\sum b_n$ puis la convergence de la suite (b_n).
   (b) Exprimer a_n en fonction de b_n et justifier que l'expression est valable pour n assez grand en utilisant la question précedente.
   (c) En déduire que $R \geq R'$
5. Conclure