Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2022-2023

Analyse 3 Durée : 2 heures

Examen final du 4 janvier 2023

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Les 6 exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. ***Le barème sera sur environ 25 points pour accorder environ un exercice bonus et tenir compte de la longueur du sujet.***

Exercice 1. Déterminer la nature (convergence/divergence) des séries de termes généraux suivants. En cas de convergence, on précisera s'il y a convergence absolue ou non.

1. $u_n = \dfrac{n}{3+\cos(n)}$,
2. $v_n = \sin\left(\dfrac{(-1)^n 6\pi}{n}\right) - \dfrac{(-1)^n}{n}$,
3. $w_n = \dfrac{\prod_{k=1}^{n}(3k-2)}{(-5)^n n!}$.

Exercice 2. Les deux questions sont indépendantes.

1. La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{7e^{-t}+\ln(t)}{t^{\frac{1}{3}}}$ est-elle intégrable sur $[1;+\infty[$?
2. Soit $a > 0$.
   (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sqrt{t\left(1-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)}}{1+t^a}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
   (b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{t\left(1-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)}}{1+t^a}\,\mathrm{d}t$ soit convergente.

Exercice 3. Pour $n \geq 3$, on définit la fonction $f_n : [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall t \geq 1, \quad f_n(t) = \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t^n + t^{-n}}}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 3}$ converge simplement sur $[1;+\infty[$ vers une fonction f que l'on explicitera.
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 3}$ converge-t-elle uniformément sur $[1;+\infty[$?
3. Déterminer la limite lorsque $n \to +\infty$ de $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.

1. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x \arctan(x^2)$ est développable en série entière en 0 et expliciter ce développement.
2. Déterminer le rayon de convergence, noté R, de la série entière associée à ce développement.
3. Montrer que cette série entière converge uniformément sur $[0; R]$.
4. Montrer l'identité

$$4 \int_0^1 x \arctan(x^2)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(n+1)}$$

   et en déduire la valeur de cette somme.

Exercice 5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $u_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = nxe^{-n^2 x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$ pour tout $a > 0$.
4. Montrer que $S(x)$ admet une limite finie lorsque $x \to +\infty$ et la déterminer.

Exercice 6. On considère l'équation différentielle

$$(E_0) : \quad (1+x^2)y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = 0.$$

1. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière (de variable réelle) de rayon de convergence R. On note $S : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sa fonction somme. On suppose que $R > 0$ et que S est solution de (E_0).
   (a) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ à déterminer tel que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = -\alpha a_n$.
   (b) Pour $p \in \mathbb{N}$, en déduire une expression de a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de a_0 et a_1.
   (c) Pour $x \in]-r; r[$ où $r = \min(R, 1)$, exprimer $S(x)$ à l'aide de fonctions usuelles. On obtiendra un résultat sous la forme $S(x) = a_0\varphi(x) + a_1\psi(x)$ avec $\psi(x) = x\varphi(x)$.
2. On admet que les fonctions φ et ψ sont solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$. Déterminer un système fondamental de solutions de (E_0).
3. Résoudre l'équation différentielle suivante

$$(E) : \quad (1+x^2)y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Correction de l'examen final (session 1) d'analyse 3 de 2022-2023

Correction de l'exercice 1

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < 2 \leq 3+\cos(n) \leq 4$ et par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient alors $u_n = \dfrac{n}{3+\cos(n)} \geq \dfrac{n}{4}$. Par conséquent, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \neq 0$ donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

2. Puisque $\dfrac{|(-1)^n|}{n} = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, le développement limité usuel de sin en 0 à l'ordre 2 entraîne

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{(-1)^n 6\pi}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{(-1)^{2n}6^2\pi^2}{n^2}\right) - \frac{(-1)^n}{n} \\ &= a_n + b_n \quad \text{avec } a_n = \frac{(-1)^n(6\pi-1)}{n} \text{ et } b_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Pour tout $n \geq 1$, $(-1)^n a_n = \dfrac{6\pi - 1}{n} \geq 0$ donc la série $\sum a_n$ est alternée. De plus, la suite $(|a_n|)_{n\geq1} = \left(\dfrac{6\pi-1}{n}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante (par décroissance de la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq1}$ et positivité de $6\pi - 1$) et converge vers 0. Le critère spécial des séries alternées entraîne donc la convergence de la série numérique $\sum a_n$. En outre, $|b_n| = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge par la règle de Riemann (car $2 > 1$). Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum |b_n|$ converge, donc il en est de même de la série $\sum b_n$. Puisque $v_n = a_n + b_n$, on en déduit que la série $\sum u_n$ converge.

Le développement asymptotique obtenu ci-dessus entraîne aussi $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{6\pi-1}{n}$. Puisque la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, et $6\pi - 1 > 0$, par comparaison de séries à termes positifs (au moins à partir d'un certain rang), la série numérique $\sum |v_n|$ diverge, donc la série $\sum v_n$ ne converge pas absolument.

3. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \neq 0$, donc $w_n > 0$. De plus,

$$\frac{|w_{n+1}|}{|w_n|} = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(3k-2)}{5^{n+1}(n+1)!}\,\frac{5^n n!}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(3k-2)} = \frac{3n+1}{5(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3n}{5n} = \frac{3}{5} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{5}$$

Comme $\dfrac{3}{5} < 1$, la règle de D'Alembert entraîne la converge de la série $\sum w_n$, donc la convergence absolue de la série $\sum w_n$ et a fortiori sa convergence.

Correction de l'exercice 2

1. La fonction f est continue sur $[1; +\infty[$ (comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas), donc intégrable sur tout segment inclus dans $[1; +\infty[$. Par positivité de la fonction exponentielle,

$$\forall t \in]1; +\infty[, \quad f(t) \geq \frac{\ln(t)}{t^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}(\ln(t))^{-1}} \geq 0$$

La fonction de Bertrand $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{\frac{1}{3}}(\ln(t))^{-1}}$ n'est pas intégrable sur $[b; +\infty[$ pour $b > 1$ car $\dfrac{1}{3} < 1$, donc par comparaison de fonctions positives, la fonction f ne l'est pas non plus. On en déduit que f n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$. (On aurait aussi pu dire que pour tout $t \geq e$, $\ln(t) \geq 1$ d'où $f(t) \geq \dfrac{1}{t^{\frac{1}{3}}}$ et conclure à l'aide de la règle de Riemann.)

2. (a) Posons $g :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(t) = \dfrac{\sqrt{t\left(1-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)}}{1+t^a}$. Puisque pour tout $t > 0$, $t\left(1-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) \geq 0$, la fonction g est bien définie et continue sur $]0;+\infty[$ par composée et quotient de fonctions continues, donc elle est intégrable sur tout segment $[b;c] \subset]0;+\infty[$. Pour $t > 0$, $1-\cos(1/t) \leq 2$ d'où par croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}^+$,

$$0 \leq g(t) \leq \frac{\sqrt{2t}}{1+t^a} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc f est prolongeable par continuité en 0. Ceci entraîne l'intégrabilité de f sur $]0;2]$ et donc la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 g(t)\,\mathrm{d}t$.

(b) La fonction g étant continue, **à valeurs positives** sur $[2;+\infty[$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ équivaut à l'intégrabilité de g sur $[2;+\infty[$. Puisque $a > 0$, $t^a \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $1+t^a \underset{t\to+\infty}{\sim} t^a$. De même, on a $\dfrac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où

$$\begin{aligned}
\sqrt{t\left(1-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)} &= \sqrt{t\left(1-\left(1-\frac{1}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)\right)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2t}+o\left(\frac{1}{t}\right)} \\
&\underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2t}}
\end{aligned}$$

d'où

$$g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2t}t^a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{t^{a+\frac{1}{2}}}.$$

Or la fonction de Riemann $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{a+\frac{1}{2}}}$ est intégrable sur $[2;+\infty[$ si, et seulement si $a+\dfrac{1}{2} > 1$, ce qui équivaut à $a > \dfrac{1}{2}$. Par comparaison de fonctions positives, la fonction g est intégrable sur $[2;+\infty[$ si, et seulement si, $a > \dfrac{1}{2}$. On a donc démontré que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $a > \dfrac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 3

1. Soit $t_0 \in [1;+\infty[$ (fixé). Si $t_0 > 1$, alors $t_0^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $t_0^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et ainsi $\sqrt{t_0^n + t_0^{-n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ce qui implique que $f_n(t_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Si $t_0 = 1$, alors $f_n(t_0) = \dfrac{\ln(2)}{\sqrt{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ln(2)}{\sqrt{2}}$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 3}$ converge donc simplement sur $[1;+\infty[$ vers la fonction $f : [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln(2)}{\sqrt{2}} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

2. Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 3}$ converge uniformément sur $[1;+\infty[$, c'est nécessairement vers sa limite simple f. On remarque que pour tout $n \geq 3$, la fonction f_n est continue sur $[1;+\infty[$ (comme quotient de composées de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas) alors que la limite simple f n'est pas continue en 1 (puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} 0 = 0 \neq f(1)$). La convergence uniforme préservant la continuité, il n'est pas possible que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 3}$ converge uniformément sur $[1;+\infty[$.

3. Remarquons que pour tout $n \geq 3$, $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{]1;+\infty[} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
   - Pour tout $n \geq 3$, la fonction f_n est continue, donc continue par morceaux sur $]1;+\infty[$.
   - La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 3}$ converge simplement sur $]1;+\infty[$ vers f qui est continue donc continue par morceaux sur $]1;+\infty[$.
   - Pour tout $n \geq 3$, pour tout $t > 1$, $t^{-n} \geq 0$ donc $t^n + t^{-n} \geq t^n \geq t^3$ d'où

   $$|f_n(t)| = \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t^n + t^{-n}}} \leq \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t^n}} \leq \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t^3}} := \varphi(t)$$

   avec $\varphi :]1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue (donc c.p.m.) sur $]1;+\infty[$, prolongeable par continuité en 1, donc intégrable sur $]1;a]$ pour tout $a > 0$, et

   $$\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}(\ln(t))^{-1}} \qquad \text{car } \frac{\ln(1+t)}{\ln(t)} = \frac{\ln(t)+\ln(1/t+1)}{\ln(t)} = 1 + \frac{\ln(1/t+1)}{\ln(t)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

   donc φ est intégrable sur $[a;+\infty[$ par la règle de Bertrand (car $\frac{3}{2} > 1$). Ainsi, φ est intégrable sur $]1;+\infty[$.

   Par le théorème de convergence dominée, les fonctions f_n et f sont intégrables sur $]1;+\infty[$ et

   $$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_1^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

Correction de l'exercice 4

1. On sait par les développements en séries entières usuels que, pour tout $u \in]-1;1[$, $\arctan(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{2n+1}$.

   Soit $x \in]-1;1[$, alors $x^2 \in]-1;1[$ aussi et donc

   $$g(x) = x\arctan(x^2) = x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x^2)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+3}}{2n+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^p \text{ avec } a_p = \begin{cases} 0 \text{ si } p \not\equiv 3[4] \\ \dfrac{(-1)^n}{2n+1} \text{ si } \exists n \in \mathbb{N}, p = 4n+3 \end{cases}$$

   Ceci démontre que g est développable en série entière en 0 et donne le développement demandé.

2. Puisque l'on a vu ci-dessus que pour tout $x \in]-1;1[$, la série numérique $\sum a_p x^p$ converge, on a déjà $R \geq 1$. De plus, si $x > 1$, alors $\left|(-1)^n \dfrac{x^{4n+3}}{2n+1}\right| = \dfrac{x^{4n+3}}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \neq 0$ par croissances comparées, donc la série numérique $\sum a_p x^p$ diverge grossièrement. On en déduit que $R \leq 1$ ce qui entraîne finalement $R = 1$.

3. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n : x \longmapsto (-1)^n \dfrac{x^{4n+3}}{2n+1}$. Soit $x \in [0;1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n u_n(x) = \dfrac{x^{4n+3}}{2n+1} \geq 0$ donc la série numérique $\sum u_n(x)$ est alternée. De plus, comme $x \leq 1$, $x^{4n+7} \leq x^{4n+3}$ et $\dfrac{1}{2n+3} \leq \dfrac{1}{2n+1}$, on a $|u_{n+1}(x)| \leq |u_n(x)|$ ce qui montre que la suite $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Enfin, $|u_n(x)| \leq \dfrac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $|u_n(x)|$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Par le critère des séries alternées (CSSA), la série numérique $\sum u_n(x)$ converge (ce que l'on savait déjà pour $x \in [0;1[$), donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0;1]$ et toujours par le CSSA,

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{2n+3}$$

   La majoration obtenue étant indépendante de x, ceci démontre que la fonction R_n est bornée sur $[0;1]$, et puisque la borne supérieure d'un ensemble est le plus petit majorant de cet ensemble,

   $$0 \leq \|R_n\|_{\infty;[0;1]} = \sup_{x\in[0;1]} |R_n(x)| \leq \frac{1}{2n+3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit par encadrement que $\|R_n\|_{\infty;[0;1]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui démontre que la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0;1]$ et nous permet de conclure que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0;1]$.

4. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est continue sur $[0;1]$ et que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur le segment $[0;1]$, on peut intervertir série et intégrale pour obtenir :

$$\int_0^1 x\arctan(x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^n\frac{x^{4n+3}}{2n+1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left[\frac{x^{4n+4}}{4n+4}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)4(n+1)}$$

d'où le résultat demandé en multipliant cette égalité par 4.

On fait une intégration par parties avec les fonctions $u : x \longmapsto \frac{x^2}{2}$ et $v : x \longmapsto \arctan(x^2)$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0;1]$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(n+1)} = \left[2x^2\arctan(x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{4x^3}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = 2\arctan(1) - \left[\ln(1+x^4)\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - \ln(2).$$

Correction de l'exercice 5

1. Le domaine de définition de S correspond au domaine de convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x < 0$, alors par croissances comparées, $u_n(x) = nxe^{-n^2x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \neq 0$ donc la série numérique $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement. Si $x = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = 0$ et la série numérique $\sum u_n(x)$ converge (la suite de ses sommes partielles est constante égale à 0 donc converge vers 0). Si $x > 0$, alors toujours par croissances comparées,

$$\frac{u_n(x)}{\frac{1}{n^2}} = n^3xe^{-n^2x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{d'où} \quad 0 \leq u_n(x) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, par comparaison de séries à termes positifs, il en est de même de la série numérique $\sum u_n(x)$. Finalement, le domaine de définition de S est $\mathbb{R}^+$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction u_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour $x \in \mathbb{R}^+$,

$$u_n'(x) = n(1-n^2x)e^{-n^2x} \geq 0 \iff 1 - n^2x \geq 0 \iff x \leq \frac{1}{n^2}$$

donc la fonction u_n est croissante sur $[0;1/n^2]$ et décroissante sur $[1/n^2;+\infty[$. Elle est donc bornée sur $\mathbb{R}^+$, et puisqu'elle est à valeurs positives sur $\mathbb{R}^+$, l'étude des variations ci-dessus entraîne

$$\|u_n\|_{\infty;\mathbb{R}^+} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+}|u_n(x)| = u_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{e^{-1}}{n}$$

Ainsi, la série $\sum_{n\geq 1}\|u_n\|_{\infty;\mathbb{R}^+}$ diverge (car $\sum \frac{1}{n}$ diverge et $e^{-1} \neq 0$), donc la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas absolument sur $\mathbb{R}^+$.

3. Soit $a > 0$. On a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est bornée sur $\mathbb{R}^+$. De plus, la fonction u_0 est nulle donc bornée sur $\mathbb{R}^+$ aussi. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est bornée sur $[a;+\infty[$. Le terme $\frac{1}{n^2}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc il existe un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ à partir duquel $\frac{1}{n^2} < a$. Pour tout $n \geq n_0$, la fontion u_n est alors décroissante sur $[a;+\infty[$, donc

$$\|u_n\|_{\infty;[a;+\infty[} = \sup_{x\in[a;+\infty[} u_n(x) = u_n(a)$$

Or l'étude de la convergence simple a prouvé la convergence de la série numérique $\sum u_n(a)$, donc la série numérique $\sum\limits_{n\geq n_0} \|u_n\|_{\infty;[a;+\infty[}$ converge, tout comme la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{\infty;[a;+\infty[}$ (les premiers termes n'influant pas la convergence de la série). Ainsi, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[a;+\infty[$.

4. L'ensemble $[1;+\infty[$ n'est pas majoré. On a vu que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[1;+\infty[$. Enfin, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction u_n admet une limite finie quand $x\to+\infty$ avec $u_n(x) = nxe^{-n^2x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées pour $n\geq 1$ et car le terme est nul pour tout x pour $n=0$. Par le théorème d'interversion limite/série, on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0.$$

Correction de l'exercice 6

1. (a) Comme $R>0$, par le cours, on sait que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R;R[$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme, donc pour tout $x\in]-R;R[$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n, \quad S'(x) = \sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} na_nx^{n-1} \quad \text{et} \quad S''(x) = \sum_{\mathbf{n=2}} n(n-1)a_nx^{n-2}.$$

Ainsi, pour tout $x\in]-R;R[$,

$$\begin{aligned}
(1+x^2)y''(x)+4xy'(x)+2y(x) &= \sum_{\mathbf{n=2}} n(n-1)a_nx^{n-2} + \sum_{\mathbf{n=2}} n(n-1)a_nx^n + 4\sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} na_nx^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{\mathbf{n=0}} n(n-1)a_nx^n + 4\sum_{\mathbf{n=0}}^{+\infty} na_nx^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2+3n+2)a_n\right)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)(a_{n+2}+a_n)x^n
\end{aligned}$$

par changement d'indice dans la première somme, et car les termes manquants dans les autres sommes sont nuls. Finalement,

$$\begin{aligned}
S \text{ est solution de } (E_0) \text{ sur }]-R;R[&\iff \forall x\in]-R;R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)(a_{n+2}+a_n)x^n = 0 \\
&\iff \forall n\in\mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)(a_{n+2}+a_n) = 0 \text{ par unicité du D.S.E} \\
&\iff \forall n\in\mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -a_n \text{ car } (n+2)(n+1)\neq 0
\end{aligned}$$

ce qui démontre bien l'existence du réel $\alpha = 1$ demandé.

(b) Pour $p\in\mathbb{N}$, notons $u_p = a_{2p}$ et $v_p = a_{2p+1}$. Par la question précédente, on a : pour tout $p\in\mathbb{N}$, $u_{p+1} = a_{2p+2} = -a_{2p} = -u_p$ et $v_{p+1} = a_{2p+3} = -a_{2p+1} = -v_p$ donc les suites $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sont des suites géométriques de raison 1. Par conséquent,

$$\forall p\in\mathbb{N}, \quad a_{2p} = u_p = (-1)^pu_0 = (-1)^pa_0 \text{ et } a_{2p+1} = v_p = (-1)^pv_0 = (-1)^pa_1.$$

(c) Pour tout $x\in]-r;r[$ avec $r=\min(R,1)$, pour tout $N\in\mathbb{N}$, on peut écrire

$$\sum_{k=0}^{2N+1} a_kx^k = \sum_{p=0}^{N} a_{2p}x^{2p} + \sum_{p=0}^{N} a_{2p+1}x^{2p+1}$$

donc en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient par convergence des séries intervenant

$$S(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p a_p a_0 x^{2p}+\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p a_1 x^{2p+1}=(a_0+a_1x)\sum_{p=0}^{+\infty}(-x^2)^p=(a_0+a_1x)\frac{1}{1-(-x^2)}=(a_0+a_1x)\frac{1}{1+x^2}$$

par sommation géométrique car $\left|-x^2\right|<1$.

2. L'équation (E_0) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2, homogène, normalisable sur $\mathbb{R}$, donc l'ensemble de ses solutions est un espace vectoriel de dimension 2. On peut montrer que la famille (φ,ψ) est libre de manière usuelle, ou à l'aide de leur wronskien

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad w(x)=\begin{vmatrix}\varphi(x) & \psi(x)\\ \varphi'(x) & \psi'(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{1+x^2} & \frac{x}{1+x^2}\\ -\frac{2x}{(1+x^2)^2} & \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\end{vmatrix}$$

donc $w(0)=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$, ce qui montre que (φ,ψ) est un système fondamental de solutions de (E_0).

3. L'équation différentielle (E) est normalisable sur $\mathbb{R}$ en

$$(E'):\quad y''(x)+\frac{4x}{1+x^2}y'(x)+\frac{2}{1+x^2}y(x)=\frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Recherchons une solution particulière de (E') à l'aide de la méthode de variations des constantes. On cherche $y : x\longmapsto \lambda(x)\varphi(x)+\mu(x)\psi(x)$ avec $\lambda,\mu:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fois dérivable solution du système suivant : pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\begin{cases}\lambda'(x)\varphi(x)+\mu'(x)\psi(x)=0\\ \lambda'(x)\varphi'(x)+\mu'(x)\psi'(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)^2}\end{cases} &\iff \begin{cases}\lambda'(x)\dfrac{1}{1+x^2}+\mu'(x)\dfrac{x}{1+x^2}=0\\ \lambda'(x)\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}+\mu'(x)\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=\dfrac{1}{(1+x^2)^2}\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}\lambda'(x)+x\mu'(x)=0\\ -2x\lambda'(x)+(1-x^2)\mu'(x)=1\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}\lambda'(x)=-\dfrac{x}{1+x^2}\\ \mu'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}\end{cases}\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $\mu : x\longmapsto \arctan(x)$ et $\lambda : x\longmapsto -\ln(\sqrt{1+x^2})$. Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{x\in\mathbb{R}\longmapsto \lambda\frac{1}{1+x^2}+\mu\frac{x}{1+x^2}-\frac{\ln(\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}+\frac{x\arctan(x)}{1+x^2}\mid \lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}.$$