Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2018-2019

Analyse III Durée : 2 heures

Examen final du mercredi 9 janvier 2019

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Les cinq exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Le barème (sur $24,5$ *points) est indicatif et tient compte de la longueur du sujet.*

Exercice 1. ($\simeq$ 4 points) Déterminer la nature des séries de termes généraux suivants (on précisera en cas de convergence s'il y a convergence absolue ou non et en cas de divergence si celle-ci est grossière ou non) :

1. $u_n = \dfrac{\mathrm{ch}(5n)}{\mathrm{e}^{4n}}$ où l'on rappelle que $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
2. $v_n = \dfrac{\sqrt{n}\mathrm{e}^n}{n!}$,
3. $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n\sqrt{n}}$.

Exercice 2. ($\simeq 3,5$ points) Soit a un réel strictement supérieur à -3.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^3 + \frac{1}{t^a}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
2. (a) Donner un équivalent simple de la fonction $t \longmapsto t^3 + \dfrac{1}{t^a}$ lorsque $t \to 0$.

   (b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^3 + \frac{1}{t^a}}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 3. ($\simeq$ 9 points) On considère la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^3y}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

1. Justifier brièvement la continuité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Montrer que f est continue en $(0,0)$.
3. Justifier brièvement que f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ par rapport à chacune de ses variables sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les calculer.
4. Montrer que f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ par rapport à chacune de ses variables en $(0,0)$ et les calculer.
5. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
6. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existent et sont différentes.
7. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4. ($\simeq 3,5$ points) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = \mathrm{e}^{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^n} = \exp\left(-\left(x - \frac{1}{2}\right)^n\right).$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}^+$?
3. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Exercice 5. ($\simeq 4,5$ points) *On rappelle que la fonction* arctan : $\mathbb{R} \longrightarrow \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ *est dérivable de dérivée* $\arctan'$: $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^+$, $\arctan(u) \leq u$.
2. Montrer que la fonction F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. *Indication : on pourra commencer par montrer que la restriction de F est définie et continue sur $[0; b]$ pour tout $b > 0$.*
3. Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et donner une expression de $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
4. On donne la décomposition suivante :

$$\forall (x,t) \in (\mathbb{R}^+)^2, \quad \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2}\right).$$

   Calculer explicitement $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
5. En déduire une expression explicite (sans intégrale) de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.