**Université Claude Bernard - Lyon 1** Semestre d'automne 2018-2019

Analyse III Durée : 1 heures 30 minutes

---

**Examen du lundi 1er juillet 2019**

---

*Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.*

*Les cinq exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.*

**Question de cours :** Énoncer le théorème de dérivation pour les fonctions de la forme $F : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^+} f(x,t)\,dt$.

**Exercice 1.** Soient $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = (\sin(x), 2y + x^2, xy).$$

Justifier l'existence des dérivées partielles de $f \circ g$ sur $\mathbb{R}^2$ et les exprimer à l'aide de celles de $f$.

**Exercice 2.** On rappelle que la série $\sum \frac{1}{(\ln n)^2}$ est divergente. On s'intéresse dans cet exercice à la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ dont le terme général est donné par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \ln(n)}.$$

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ est alternée.
2. Le théorème de convergence des suites alternées s'applique-t-il à la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ ? On justifiera soigneusement la réponse.
3. On considère la série $\sum_{n\geq 2} v_n$ de terme général

   $$v_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)}.$$

   Montrer qu'il s'agit d'une série convergente.
4. Déterminer la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum_{n\geq 2}(u_n - v_n)$ et en déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$.

**Exercice 3.** Soient $a$ et $b$ des nombres réels avec $0 < a < b$.

1. Montrer que l'intégrale suivante est convergente :

   $$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt.$$

2. Montrer que pour tous nombres réels $x, y$ avec $0 < x < y$, on a

   $$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

3. Montrer que pour tout réel $z > 0$, on a

$$e^{-bz}\ln(b/a) \leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t}dt \leq e^{-az}\ln(b/a)$$

et en déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = \ln(b/a).$$

**Exercice 4.** On considère la fonction $f$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

1. Justifier brièvement la continuité de $f$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. (a) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^+$, $\sin(u) \leq u$.

   (b) Montrer que $f$ est continue en $(0,0)$.
3. La fonction $f$ admet-elle des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ par rapport à chacune de ses variables en $(0,0)$ ?

**Exercice 5.** Soit $k \geq 1$ un entier. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x^k}{x^2+n}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $f$ que l'on précisera.
2. Pour quelles valeurs de $k$ la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$ ?
3. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[a;b]$ ($a, b$ réels avec $a < b$).

## Correction du Devoir Surveillé 1 - partie CCP

**Correction de l'exercice 1** Notons $g_1, g_2, g_3$ les fonctions coordonnées de $g$, ainsi $g_1 : (x,y) \longmapsto \sin(x)$ est la composée de la fonction polynomiale $(x,y) \longmapsto x$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ avec la fonction d'une seule variable réelle sin qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par suite, $g_1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Puisque les fonctions $g_2$ et $g_3$ sont polynomiales, les fonctions coordonnées de $g$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ donc il en est de même de $g$. Par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction $f \circ g$ est elle-même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Elle admet donc des dérivées partielles (qui sont continues sur $\mathbb{R}^2$) et par la formule de dérivation en chaîne : pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f \circ g}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y)\partial_1 f(g(x,y)) + \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y)\partial_2 f(g(x,y)) + \frac{\partial g_3}{\partial x}(x,y)\partial_3 f(g(x,y))\\ &= \cos(x)\partial_1 f(\sin(x), 2y+x^2, xy) + 2x\partial_2 f(\sin(x), 2y+x^2, xy) + y\partial_3 f(\sin(x), 2y+x^2, xy)\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}\frac{\partial f \circ g}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y)\partial_1 f(g(x,y)) + \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y)\partial_2 f(g(x,y)) + \frac{\partial g_3}{\partial y}(x,y)\partial_3 f(g(x,y))\\ &= 0 + 2\partial_2 f(\sin(x), 2y+x^2, xy) + x\partial_3 f(\sin(x), 2y+x^2, xy)\end{aligned}$$

On aurait aussi pu utiliser la formule utilisant les matrices jacobiennes pour obtenir ce résultat : $J_{f\circ g}(x,y) = J_f(g(x,y)) \times J_g(x,y)$.

**Correction de l'exercice 2**

1. Tout d'abord, pour tout $n = 2$, $(-1)^n + \ln n = 1 + \ln 2 > 0$ et pour tout $n \geq 3$, $(-1)^n + \ln n > -1 + \ln(e) = 0$ donc le terme $u_n$ est bien défini pour tout $n \geq 2$. De plus, pour tout $n \geq 2$,
$$(-1)^n u_n = \frac{1}{(-1)^n + \ln n} > 0$$
par ce que l'on vient d'expliquer. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est alternée, donc la série $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ aussi.

2. La série $\sum u_n$ étant alternée, elle vérifie le critère des séries alternées si, et seulement si, la suite $(|u_n|)_{n\geq 2}$ est décroissante et converge vers 0. Puisque
$$|u_n| = \frac{1}{(-1)^n + \ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
on va s'intéresser à l'étude de la monotonie de la suite $(|u_n|)_{n\geq 2}$. Soit $n \geq 2$, alors
$$\begin{aligned}|u_{n+1}| - |u_n| &= \frac{1}{(-1)^{n+1} + \ln(n+1)} - \frac{1}{(-1)^n + \ln n}\\ &= \frac{(-1)^n + \ln n - (-1)^{n+1} - \ln(n+1)}{((-1)^{n+1} + \ln(n+1))((-1)^n + \ln n)}\\ &= \frac{2(-1)^n - \ln(1+1/n)}{((-1)^{n+1} + \ln(n+1))((-1)^n + \ln n)}\end{aligned}$$
qui est du signe de $2(-1)^n$ puisque $0 \leq \ln(1+1/n) \leq 1$. Ainsi, la suite $(|u_n|)_{n\geq 2}$ n'est pas décroissante (même à partir d'un certain rang), on ne peut donc pas appliquer le critère des séries alternées à la série $\sum u_n$.

3. Pour tout $n \geq 2$, $(-1)^n v_n = \dfrac{1}{\ln n} \geq 0$ donc la suite $(v_n)_n$ est alternée. De plus, par croissance de la fonction ln sur $]0;+\infty[$, la suite $(|v_n|)_{n\geq 2} = \left(\dfrac{1}{\ln n}\right)_{n\geq 2}$ est décroissante et converge vers 0. par le critère des séries alternées, la série $\sum\limits_{n\geq 2} v_n$ est convergente.

4. Pour tout $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \ln(n)} - \frac{(-1)^n}{\ln n} \\ &= \frac{(-1)^n (\ln n - (-1)^n - \ln n)}{((-1)^n + \ln(n)) \ln n} \\ &= -\frac{1}{((-1)^n + \ln(n)) \ln n} \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$v_n - u_n = \frac{1}{((-1)^n + \ln(n)) \ln n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{(\ln n)^2}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs et comparaison à la série de Bertrand $\sum \frac{1}{(\ln n)^2}$ divergente, la série $\sum (v_n - u_n) = \sum -(u_n - v_n)$ est divergente donc il en est de même de la série $\sum (u_n - v_n)$. Puisque pour tout $n \geq 2$, $u_n = v_n + (u_n - v_n)$ avec $\sum v_n$ convergente et $\sum (u_n - v_n)$ divergente, la série $\sum u_n$ est divergente.

**Correction de l'exercice 3**

1. Notons $f : t \in ]0; +\infty[ \longmapsto \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$. La fonction $f$ est continue sur $]0; +\infty[$.
   - Au voisinage de 0,

     $$f(t) = \frac{1 - at + o(t) - (1 - bt + o(t))}{t} = \frac{(b-a)t + o(t)}{t} = (b-a) + o(1) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} b - a$$

     donc $f$ est prolongeable par continuité en 0. Elle est donc intégrable sur le segment $[0; 1]$.
   - Lorsque $t \to +\infty$, on a

     $$t^2 f(t) = te^{-at} - te^{-bt} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{par croissances comparées et car } a, b > 0.$$

     On en déduit que $f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ lorsque $t \to +\infty$. Par le critère de Riemann, la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ donc il en est de même de $f$. Ainsi, $f$ est intégrable sur $]0; +_infty[$ donc l'intégrale considérée converge.

2. En utilisant la linéarité de l'intégrale (possible puisque l'on est sur le segment $[x; y]$) puis les changements de variables respectifs $u = at$ et $v = bt$, o obtient

$$\begin{aligned} \int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \, \mathrm{d}t &= \int_{ax}^{ay} \frac{e^{-u}}{u} \, \mathrm{d}u - \int_{bx}^{by} \frac{e^{-v}}{v} \, \mathrm{d}v \\ &= \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u} \, \mathrm{d}u + \int_{bx}^{ay} \frac{e^{-u}}{u} \, \mathrm{d}u - \int_{bx}^{by} \frac{e^{-u}}{u} \, \mathrm{d}u \quad \text{par Chasles} \\ &= \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u} \, \mathrm{d}u - \int_{ay}^{bx} \frac{e^{-u}}{u} \, \mathrm{d}u - \int_{bx}^{by} \frac{e^{-u}}{u} \, \mathrm{d}u \\ &= \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u} \, \mathrm{d}u - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-u}}{u} \, \mathrm{d}u \end{aligned}$$

qui donne bien le résultat voulu.

3. Soit $z > 0$. Par décroissance de la fonction $t \longmapsto e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$, on a pour tout $t \in [az; bz]$, $e^{-bz} \leq e^{-t} \leq e^{-az}$. La croissance de l'intégrale entraîne alors

$$e^{-bz} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \int_{az}^{bz} \frac{e^{-bz}}{t} \, \mathrm{d}t \leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t} \, \mathrm{d}t \leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-az}}{t} \, \mathrm{d}t = e^{-az} \left[\ln(t)\right]_{az}^{bz} = e^{-az} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

**Correction de l'exercice 4**

1. Sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la fonction $f$ est donnée par $(x,y) \longmapsto \dfrac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Les fonctions polynomiales $(x,y) \longmapsto x^2$ et $(x,y) \longmapsto y^2$ sont continues (sur $\mathbb{R}^2$), donc par composition avec la fonction sin continue sur $\mathbb{R}$ et somme, $(x,y) \longmapsto \sin(x^2)+\sin(y^2)$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. De même, le dénominateur $(x,y) \longmapsto \sqrt{x^2+y^2}$ est la composée de $\sqrt{\ }$ continue sur $\mathbb{R}$ avec une fonction polynomiale (on peut aussi reconnaître la norme euclidienne et utiliser le résultat de cours sur sa continuité). Par quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f$ est continue sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2. (a) Posons $g : u \in \mathbb{R}^+ \longmapsto u - \sin(u)$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ de dérivée $g' : u \longmapsto 1-\cos(u)$ qui est à valeurs positives. Ainsi, $g$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie $g(0)=0$ d'où $g(u) \geq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^+$, ce qui démontre que $\sin(u) \leq u$ pour tout $u \in \mathbb{R}^+$.

   (b) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, alors

   $$|f(x,y)| = \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

   ce qui démontre par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ et prouve la continuité de $f$ en $(0,0)$.

3. La fonction $f$ admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$ si, et seulement si, $\dfrac{1}{t}\left(f(t,0)-f(0,0)\right)$ admet une limite finie lorsque $t \to 0$ (avec $t \neq 0$). Soit $t \in \mathbb{R}^*$, alors

   $$\frac{1}{t}\left(f(t,0)-f(0,0)\right) = \frac{1}{t}\frac{\sin(t^2)}{\sqrt{t^2}} = \frac{\sin(t^2)}{t\,|t|} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{|t|}$$

   qui n'admet pas de limite finie lorsque $t \to 0$ puisque $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{t}{|t|} = 1 \neq \lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{t}{|t|} = -1$. Par symétrie des rôles de $x$ et $y$, on peut voir que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ n'existe pas non plus. Sinon, on étudie l'existence d'une limite finie de $\dfrac{1}{t}\left(f(0,t)-f(0,0)\right)$ lorsque $t \to 0$.

**Correction de l'exercice 5**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $x^2 + n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ d'où

   $$f_n(x) = \frac{x^k}{x^2+n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   ce qui démontre que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, que l'on notera $\widetilde{0}$.

2. La convergence uniforme entraînant la convergence simple, si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément, c'est forcément vers sa limite simple. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

   $$|f_n(x) - \widetilde{x}| = |f_n(x)| = \frac{|x|^k}{x^2+n}.$$

   On remarque que $|f_n|$ est paire, et positive sur $\mathbb{R}^+$, on peut donc se contenter d'étudier les variations de $f_n$ sur $\mathbb{R}^+$. La fonction $f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée donnée par

   $$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n'(x) = \frac{kx^{k-1}(x^2+n) - 2x^{k+1}}{(x^2+n)^2} = \frac{x^{k-1}((k-2)x^2+kn)}{(x^2+n)^2}$$

   qui est du signe de $(k-2)x^2 + kn$ sur $\mathbb{R}^+$. On distingue alors les cas selon les valeurs de $k$.

- Si $k \geq 2$, alors $k-2 \geq 0$ d'où $(k-2)x^2 + kn \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. Par conséquent, la fonction $f_n$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme de plus,

$$f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^k}{x^2} = x^{k-2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty \text{ si } k > 2 \\ 1 \text{ si } k = 2 \end{cases}$$

on en déduit que dans le cas $k > 2$, la fonction $|f_n|$ n'est pas bornée donc $\|f_n - \widetilde{0}\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$ n'existe pas (ou vaut $+\infty$ selon les conventions). Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Si $k = 2$, la croissance de $|f_n|$ sur $\mathbb{R}^+$ ainsi que sa parité entraînent

$$\|f_n - \widetilde{0}\|_\infty = \lim_{x\to+\infty} |f_n(x)| = 1$$

qui ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

- Si $k = 1$, alors

$$(k-2)x^2 + kn \geq 0 \iff n \geq x^2 \iff \sqrt{n} \geq x$$

(par croissance de la fonction carrée et de la fonction racine sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, $f_n$ est croissante sur $[0; \sqrt{n}]$ puis décroissante sur $[\sqrt{n}; +\infty[$. Ainsi,

$$|f_n - \widetilde{0}\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in\mathbb{R}+} f_n(x) = f_n(\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui démontre que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\widetilde{0}$ dans le cas $k = 1$.

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. La décroissance de $|\ |$ sur $\mathbb{R}^-$ et sa croissance sur $\mathbb{R}^+$ entraînent :

$$|f_n(x)| = \frac{|x|^k}{x^2 + n} \leq \frac{\max(|a|^k, |b|^k)}{n}$$

(car $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + n \geq n$). Ceci étant indépendant de $x$, cela montre que la fonction $|f_n|$ est bornée sur $[a; b]$ et puisque la borne supérieure est le plus petit des majorants de l'ensemble, il vient

$$0 \leq \|f_n\|_{\infty;[a;b]} \leq \frac{\max(|a|^k, |b|^k)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a; b]$ vers la fonction nulle.