Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2022-2023

Algèbre 3 Durée : 2 heures

Examen final du 5 janvier 2023

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Les 4 exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{C}$. Pour $n \geq 3$, on considère la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 \\ a & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

et on note $D_n = \det(A_n)$ son déterminant.

1. Donner une expression explicite de D_n en fonction de n et a.
2. Déterminer l'ensemble des complexes a pour lesquels la matrice A_n est inversible.
3. Déterminer le rang de A_n en fonction des valeurs de a.

Exercice 2. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice telle que :

$$A^3 = I_3 \quad \text{et} \quad \text{la famille } (I_3, A, A^2) \text{ est libre.}$$

1. Montrer que A est diagonalisable **dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$**.
2. On note $\pi_A \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme minimal de A. Montrer que le degré de π_A est supérieur ou égal à 3 et en déduire π_A.
3. La matrice A est-elle diagonalisable (resp. trigonalisable) dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
4. Calculer la trace de A et le déterminant de A.

Exercice 3. (Les questions 3 et 4 peuvent être faites même sans avoir réussi à répondre aux questions 1 et 2.)
Soit $b \in \mathbb{R}$. On note B la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & b & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de B.
2. Discuter, en fonction des valeurs de b, de la diagonalisabilité de B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. On suppose $b = 4$. Diagonaliser la matrice B en donnant une matrice de passage.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle déterminée par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 12 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = -u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n.$$

À l'aide de la question précédente, déterminer une expression explicite de u_n en fonction de n.

Exercice 4. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 et $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E. Soit u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_0$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de $u - \mathrm{Id}_E$ et en déduire une valeur propre de u. Que peut-on dire sur la multiplicité algébrique de cette valeur propre ?
2. Montrer que $\dim \mathrm{Ker}(u + 2\,\mathrm{Id}_E) = 1$.
3. Montrer que le polynôme caractéristique de u, noté χ_u, est scindé sur $\mathbb{R}$ et en déduire χ_u.
4. Déterminer le polynôme minimal noté π_u de u.
5. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}((u + 2\,\mathrm{Id}_E)^2)$ (aucun calcul n'est nécessaire pour cette question).
6. Montrer que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}((u + 2\,\mathrm{Id}_E)^2)$ sont stables par u.
7. Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à la décomposition trouvée à la question 5. Donner la forme de la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
8. Construire une base $\mathcal{B}'$ de E telle que la matrice de u dans $\mathcal{B}'$, notée T, soit

$$T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

   où λ_1, λ_2 et λ_3 sont des réels que l'on explicitera.
9. Déterminer $\exp(aT)$ pour $a \in \mathbb{R}$.
10. Résoudre le système différentiel (S) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) \\ y'(t) = -x(t) - 2y(t) - 2z(t) + u(t) \\ z'(t) = z(t) \\ u'(t) = -6x(t) - 3z(t) - 2u(t) \end{cases}$$

   d'inconnues $x, y, z, u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables.

Correction de l'examen final (session 1) d'algèbre 3 de 2022-2023

Correction de l'exercice 1

1. Soit $n \geq 3$. En développant le déterminant selon la première colonne, il vient

$$\begin{aligned} D_n &= \det(I_{n-1}) + (-1)^{n+1} a \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 + (-1)^{n+1} a (-1)^{n-1+1} a \det(I_{n-2}) \text{ en ayant développé le 2nd déterminant par rapport à la 1ère ligne} \\ &= 1 - a^2 \end{aligned}$$

2. On dispose de l'équivalence :

$$\begin{aligned} A_n \in GL_n(\mathbb{C}) &\iff \det(A_n) \neq 0 \\ &\iff a^2 \neq 1 \\ &\iff a \notin \{-1; 1\}. \end{aligned}$$

3. Si $a \notin \{-1; 1\}$, la matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est inversible donc de rang n. Si $a \in \{-1; 1\}$, A_n n'est pas inversible donc $\text{rang}(A_n) \leq n - 1$. On peut remarquer que les $n - 1$ premières colonnes de A_n sont échelonnées donc forment une famille libre, ainsi $\text{rang}(A_n) \geq n - 1$, ou voir que lors du développement du déterminant de A_n, on a obtenu un mineur d'ordre $n - 1$ non nul, donc $\text{rang}(A_n) \geq n - 1$. Finalement, la matrice A_n est de rang $n - 1$ lorsque $a \in \{-1; 1\}$.

Correction de l'exercice 2

1. Puisque $A^3 = I_3$, on en déduit que $A^3 - I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{C})}$ donc le polynôme $X^3 - 1$ est annulateur de la matrice A. Comme $X^3 - 1 = (X - 1)(X - j)(X - j^2)$ où $j = e^{2i\pi/3}$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

2. Supposons par l'absurde que π_A soit de degré strictement inférieur à 3, il existe alors $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\pi_A = aX^2 + bX + c$. Par ailleurs, π_A est annulateur de A, donc

$$\begin{aligned} \pi_A(A) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} &\iff aA^2 + bA + cI_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \\ &\iff a = b = c = 0 \end{aligned}$$

par liberté de la famille (I_3, A, A^2). Ceci est absurde puisque le polynôme minimal π_A étant unitaire, le coefficient dominant de π_A est égal à 1, donc l'un au moins des coefficients est non nul égal à 1. Ainsi, π_A est de degré supérieur ou égal à 3.

On a vu ci-dessus que le polynôme $X^3 - 1$ est annulateur de A, donc π_A divise $X^3 - 1$. Comme $\deg(\pi_A) \geq 3$, on a donc nécessairement $\deg(\pi_A) = 3$ et il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $X^3 - 1 = \alpha \pi_A$. Les polynômes $X^3 - 1$ et π_A étant tous deux unitaires, on en déduit que $\alpha = 1$ d'où $\pi_A = X^3 - 1$.

3. La factorisation en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme π_A est $\pi_A = (X - 1)(1 + X + X^2)$ (puisque le discriminant de $1 + X + X^2$ vaut $-3 < 0$). Comme π_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, la matrice A n'est pas trigonalisable, et a fortiori pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4. On peut utiliser la première question en diagonalisant la matrice A : il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(1, j, j^2)$. Deux matrices semblables ayant même trace et déterminant, on en conclut :

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(D) = 1 + j + j^2 = 0 \quad \text{et} \quad \det(A) = \det(D) = 1 \times j \times j^2 = j^3 = 1.$$

On aurait aussi pu dire que par le théorème de Cayley-Hamilton, π_A divise le polynôme caractéristique de A, noté χ_A. Or celui-ci est unitaire, de degré 3, donc nécessairement $\chi_A = \pi_A = X^3 - 1$. Or certains coefficients de χ_A sont connus : $\chi_A = X^3 - \mathrm{Tr}(A)X^2 + \cdots + (-1)^3 \det(A)$. Deux polynômes étant égaux si, et seulement si, leurs coefficients sont égaux. Ainsi, $\mathrm{Tr}(A) = -0 = 0$ et $\det(A) = -(-1) = 1$.

Correction de l'exercice 3

1. En effectuant les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 + C_3$ puis $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, le polynôme caractéristique de B devient

$$\chi_B = \det(XI_3 - B) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -b & -b & X+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X+1 & -1 & 0 \\ -X-1 & X & -1 \\ X+1 & -b & X+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X+1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ 0 & -b+1 & X+1 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première colonne, il vient finalement

$$\chi_B = (X+1) \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ -b+1 & X+1 \end{vmatrix} = (X+1)\left((X-1)(X+1) - b + 1\right) = (X+1)(X^2 - b).$$

2. Si $b < 0$, le polynôme $X^2 - b$ n'a aucune racine réelle, donc χ_B n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, la matrice B n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Si b est nul, alors $\chi_B = (X+1)X^2$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et le spectre de B est $\{-1; 0\}$. Comme 0 est de multiplicité algébrique 2, cherchons la multiplicité géométrique de B : les deux dernière colonnes de la matrice ci-dessous étant non colinéaires,

$$\mathrm{rang}(B - 0I_3) = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{d'où} \quad \dim \mathrm{Ker}(B) = 3 - 2 = 1$$

par le théorème du rang. Ainsi, les multiplicités algébriques et géométriques de 0 sont différentes, donc B n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Si $b > 0$, alors χ_B se factorise en $\chi_B = (X+1)(X - \sqrt{b})(X + \sqrt{b})$ donc χ_B est scindé sur $\mathbb{R}$ et le spectre de B est $\{-1, -\sqrt{b}, \sqrt{b}\}$ avec $-1 \neq \sqrt{b} > 0$ et $-\sqrt{b} \neq \sqrt{b}$. On distingue alors les cas selon si $-\sqrt{b} = -1$ (ce qui équivaut à $b = 1$) ou non.

- Si $b \neq 1$, alors le polynôme χ_B est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Si $b = 1$, alors $\chi_B = (X+1)^2(X-1)$, $\mathrm{Sp}(B) = \{-1; 1\}$ et -1 est valeur propre de multiplicité algébrique 2. De plus, comme dans la matrice ci-dessous, C_1 et C_3 sont non colinéaires, et $C_2 = C_1 + C_3$,

$$\mathrm{rang}(B + I_3) = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{donc} \quad \dim \mathrm{Ker}(B + I_3) = 3 - 2 = 1 \neq m_{-1}(B) = 2$$

  et la matrice B n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Finalement, on a démontré que la matrice B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ si, et seulement si, le réel b appartient à $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

3. Comme $b = 4$, par la question précédente, B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$et $\mathrm{Sp}(B) = \{-1, -2, 2\}$. On cherche une base de chacun des espaces propres de B. Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$, notons $E_\lambda(B) = \mathrm{Ker}(B - \lambda I_3)$ et $m_\lambda(B)$ la multiplicité algébrique de λ. On sait que $1 \leq \dim E_\lambda(B) \leq m_\lambda(B) = 1$ donc $E_\lambda(B)$ est de

dimension 1. Il suffit donc de trouver un vecteur non nul dans $E_\lambda(B)$ pour avoir une base de ce sous-espace vectoriel. On a :

$$E_{-1}(B) = \mathrm{Ker}(B + I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 4 & 4 & 0\end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\{e_1\} \text{ où } e_1 = \begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

car dans la matrice ci-dessus, $C_1+C_3-C_2$ est la colonne nulle donc le vecteur e_1 appartient bien à $\mathrm{Ker}(B+I_3)$. De même,

$$E_{-2}(B) = \mathrm{Ker}(B + 2I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 4 & 4 & 1\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \left\{\begin{array}{l}2a+b=0\\ 2b+c=0\\ 4a+4b+c=0\end{array}\right.\right\}$$

ce qui donne

$$E_{-2}(B) = \left\{\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \left\{\begin{array}{l}b=-2a\\ c=4a\end{array}\right.\right\} = \mathrm{Vect}\{e_2\} \text{ où } e_2 = \begin{pmatrix}1\\ -2\\ 4\end{pmatrix}$$

Enfin,

$$E_2(B) = \mathrm{Ker}(B - 2I_) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 4 & 4 & -3\end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\{e_3\} \text{ où } e_3 = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}$$

car $C_1 + 2C_2 + 4C_3$ est la colonne nulle. Comme B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = E_{-1}(B) \oplus E_{-2}(B) \oplus E_2(B)$ et la concaténation $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ des bases trouvées ci-dessus forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de B. En notant P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, on obtient alors par les formules de changement de bases :

$$P^{-1}BP = D \text{ où } D = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & 2\\ 1 & 4 & 4\end{pmatrix}.$$

4. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \begin{pmatrix}u_n\\ u_{n+1}\\ u_{n+2}\end{pmatrix} \text{ alors } X_{n+1} = \begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_{n+2}\\ -u_{n+2}+4u_{n+1}+4u_n\end{pmatrix} = BX_n \text{ avec } B = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 4 & 4 & -1\end{pmatrix}.$$

On en déduit par récurrence immédiate que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = B^nX_0 = (PDP^{-1})^nX_0 = PD^nP^{-1}X_0 \text{ où } X_0 = \begin{pmatrix}u_0\\ u_1\\ u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 12\end{pmatrix}.$$

On peut calculer P^{-1} à l'aide de la méthode du miroir, et faire ensuite tous les calculs afin de trouver la première ligne de X_n (en remarquant que $P^{-1}X_0$ correspond à 12 fois la dernière colonne de P^{-1}), ou écrire

$$\begin{aligned}P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} \text{ d'où } X_n &= PD^nP^{-1}X_0\\ &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & 2\\ 1 & 4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n & 0 & 0\\ 0 & (-2)^n & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}(-1)^n & (-2)^n & 2^n\\ * & * & *\\ * & * & *\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}(-1)^n\alpha + (-2)^n\beta + 2^n\gamma\\ *\\ *\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ce qui donne $u_n = (-1)^n\alpha + (-2)^n\beta + 2^n\gamma$. Il ne reste plus qu'à trouver les valeurs de α, β, γ à l'aide des valeurs de u_0, u_1 et u_2. On trouve le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ -\alpha-2\beta+2\gamma=0 \\ \alpha+4\beta+4\gamma=12 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ -\beta+3\gamma=0 \\ 3\beta+3\gamma=12 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha=-\beta-\gamma \\ \beta=3\gamma \\ 12\gamma=12 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha=-4 \\ \beta=3 \\ \gamma=1 \end{array}\right.$$

Finalement, on a démontré que $u_n = -4(-1)^n + 3(-2)^n + 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 4

1. On a

$$\operatorname{rang}(u - \mathrm{Id}_E) = \operatorname{rang}(M - I_4) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} = 2$$

car les lignes 1 et 3 sont nulles et les lignes 2 et 4 ne sont pas colinéaires (rappelons que le rang d'une matrice étant égal à celui de sa matrice transposée, le rang d'une matrice est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses colonnes, ou bien celle de l'espace vectoriel engendré par ses lignes). Par le théorème du rang, on en déduit que $\dim(\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)) = \dim(E) - \operatorname{rang}(u - \mathrm{Id}_E) = 2 \neq 0$, donc $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$. Par suite, 1 est valeur propre de u, et sa multiplicité algébrique $m_1(u)$ est supérieure à sa multiplicité géométrique, d'où $m_1(u) \geq \dim(\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)) = 2$.

2. On peut procéder comme ci-dessus, ou vu les questions d'après, déterminer explicitement le noyau de $\operatorname{Ker}(u + 2\,\mathrm{Id}_E)$. Soit $x = \sum_{i=1}^{4} x_i e_i \in E$. On a :

$$x \in \operatorname{Ker}(u + 2\,\mathrm{Id}_E) \iff (M + 2I_4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne finalement

$$x \in \operatorname{Ker}(u + 2\,\mathrm{Id}_E) \iff \left\{\begin{array}{l} 3x_1 = 0 \\ -x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_3 = 0 \\ -6x_1 - 3x_3 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}\right.$$

d'où $\operatorname{Ker}(u + 2\,\mathrm{Id}_2) = \{x_2 e_2 \mid x_2 \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}\{e_2\}$ et cet espace est de dimension 1 puisque $e_2 \neq 0_E$.

3. Par la question précédente, -2 est valeur propre de u, de multiplicité algébrique $m_{-2}(u) \geq 1$. Les racines (dans $\mathbb{R}$) du polynôme caractéristique étant exactement les valeurs propres de u, on en déduit que le polynôme $(X-1)^2(X+2)$ divise χ_u. Par ailleurs, χ_u est unitaire, de degré $\dim(E) = 4$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_u = (X-1)^2(X+2)(X+\lambda)$. Ainsi, χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$. Ceci entraîne que l'endomorphisme u est trigonalisable, donc la somme de ses valeurs propres comptées avec multiplicité algébrique est égale à sa trace, ce qui donne

$$2 \times 1 + (-2) + (-\lambda) = \operatorname{Tr}(u) = \operatorname{Tr}(M) = -2 \quad \text{d'où} \quad \lambda = 2$$

et ainsi $\chi_u = (X-1)^2(X+2)^2$ (on aurait aussi pu utiliser le fait que $\chi_u = X^4 - \operatorname{Tr}(u)X^3 + \cdots$ et identifier le coefficient devant X^3).

4. Le polynôme minimal de u est unitaire, divise χ_u (puisque χ_u est annulateur de u d'après le théorème de Cayley-Hamilton), et possède exactement les mêmes racines (réelles) que χ_u (car l'ensemble de ses racines correspond au spectre de u). Par ailleurs, comme $m_{-2}(u) = 2 \neq \dim(\mathrm{Ker}(u + 2\,\mathrm{Id}_E))$, l'endomorphisme u n'est pas diagonalisable. Son polynôme minimal ne peut donc pas être scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Il reste donc trois possibilités : $\pi_u = (X-1)(X+2)^2$, $\pi_u = (X-1)^2(X+2)$ ou $\pi_u = \chi_u$. On teste ces polynômes en cherchant celui de plus petit degré qui annulera u. Comme le caractère non diagonalisable provient de la valeur propre -2, on peut intuiter qu'il faut avoir un carré sur $(X+2)$, on teste donc en premier $(X-1)(X+2)^2$:

$$(M - I_4)(M + 2I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ -18 & 0 & -9 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$$

d'où $(u - \mathrm{Id}_E) \circ (u + 2\,\mathrm{Id}_E)^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Ainsi, le polynôme $(X-1)(X+2)^2$ est annulateur de u donc $\pi_u = (X-1)(X+2)^2$.

5. Puisque les polynômes $X - 1$ et $(X+2)^2$ sont premiers entre eux, on peut utiliser le Lemme des noyaux sur le polynôme $\pi_u = (X-1)(X+2)^2$ de manière à obtenir

$$\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}((u + 2\,\mathrm{Id}_E)^2) = \mathrm{Ker}(\pi_u(u)) = \mathrm{Ker}(0_{\mathcal{L}(E)}) = E$$

ce qui donne le résultat voulu.

6. On peut remarquer que les endomorphismes $u - \mathrm{Id}_E$ et $(u + 2\,\mathrm{Id}_E)^2 = u^2 + 4u + 4\,\mathrm{Id}_E$ commutent avec u, donc par le cours, leurs noyaux sont stables par u ou revenir à la définition d'un sous-espace stable.

7. La base $\mathcal{B}$ est de la forme $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_3)$ où $\mathcal{B}_1 = (f_1, f_2)$ est une base de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathcal{B}_2 = (f_3, f_4)$ est une base de $\mathrm{Ker}((u + 2\,\mathrm{Id}_E)^2)$. Puisque les deux sous-espaces sont stables par u, d'après le cours, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs, de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} & B \end{pmatrix} \text{ où } A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(v), B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(w) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),$$

v est l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et w l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Ker}((u+2\,\mathrm{Id}_E)^2)$. Comme pour tout $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$, $v(x) = u(x) = x$, on obtient de plus $A = I_2$ (et a priori on ne peut pas dire grand chose de plus sur la matrice B).

8. On va chercher une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et une base $\mathcal{B}_2$ de $\mathrm{Ker}((u + 2\,\mathrm{Id}_E)^2)$ dont le premier vecteur forme une base de $\mathrm{Ker}(u + 2\,\mathrm{Id}_E)$. Comme $\dim(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)) = 2$, il suffit de trouver deux vecteurs libres dans $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ pour en avoir une base. On remarque que dans la matrice $M - I_4$, $C_2 - C_3 + C_4$ est la colonne nulle, donc le vecteur $f_1 := e_2 - e_3 + e_4$ appartient à $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$. De même, $C_1 - C_2 - 2C_4$ est nulle, donc $f_2 := e_1 - e_2 - 2e_4 \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$. Ces deux vecteurs étant non colinéaires, (f_1, f_2) est une base de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$.

   En outre, en reprenant la matrice

$$(M + 2I_4)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ -18 & 0 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

   on voit que

$$\mathrm{Ker}((u + 2\,\mathrm{Id}_E)^2) = \left\{ \sum_{i=1}^{4} x_i e_i \in E \mid \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right. \right\} = \{x_2 e_2 + x_4 e_4 \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{e_2, e_4\}.$$

En posant $f_3 = e_2$ et $f_4 = e_4$, la famille (f_3, f_4) est une base de $\mathrm{Ker}((u+2\,\mathrm{Id}_E)^2)$. Finalement, la concaténation $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ forme une base de E adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}((u+2\,\mathrm{Id}_E)^2)$ et la matrice de u dans $\mathcal{B}'$ est

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

car $u(f_4) = u(e_4) = e_2 - 2e_4 = f_2 - 2f_4$.

9. Soit $a \in \mathbb{R}$, alors $aT = D + N$ avec

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2a \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $N^2 = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$ donc N est nilpotente et pour tout $k \geq 2$, $N^k = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$. De plus, les matrices D et N commutent, donc par le cours sur les exponentielles de matrices

$$e^{aT} = e^{D+N} = e^D e^N = e^D \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{N^k}{k!} \right) = e^D \left(\sum_{k=0}^{1} \frac{N^k}{k!} \right) = e^D (I_3 + N)$$

ce qui donne, puisque la matrice D est diagonale,

$$e^{aT} = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2a} & ae^{-2a} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2a} \end{pmatrix}.$$

10. Soient $x, y, z, u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables. On pose $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ u(t) \end{pmatrix}.$$

Alors X est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} x, y, z \text{ et } u \text{ sont solutions de } (S) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = MX(t) \\ &\iff \exists X_0 \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = e^{tM} X_0. \end{aligned}$$

Or par l'étude ci-dessus, en notant P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}'$ obtenue, la formule de changement de base implique que $M = PTP^{-1}$, ce qui entraîne pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{tM} = e^{t(PTP^{-1})} = e^{P.tT.P^{-1}} = Pe^{tT}P^{-1}$$

et ainsi x, y, z et u sont solutions de (S) si, et seulement si,

$$
\begin{aligned}
& \exists X_0 \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = Pe^{tT}P^{-1}X_0 \\
\iff \quad & \exists Y_0 \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = Pe^{tT}Y_0 \text{ en posant } Y_0 = P^{-1}X_0 \\
\iff \quad & \exists \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma\delta \end{pmatrix} \\
\iff \quad & \exists \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^t & 0 & 0 \\ e^t & -e^t & e^{-2t} & te^{-2t} \\ -e^t & 0 & 0 & 0 \\ e^t & -2e^t & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta e^t \\ \alpha e^t - \beta e^t + \gamma e^{-2t} + \delta te^{-2t} \\ -\alpha e^t \\ \alpha e^t - 2\beta e^t + \delta e^{-2t} \end{pmatrix} \\
\iff \quad & \exists \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = \beta e^t \\ y(t) = \alpha e^t - \beta e^t + \gamma e^{-2t} + \delta te^{-2t} \\ z(t) = -\alpha e^t \\ u(t) = \alpha e^t - 2\beta e^t + \delta e^{-2t} \end{array} \right.
\end{aligned}
$$