

Le point de vue de ce chapitre consiste à relier une géométrie plane supposée connue aux nombres complexes (re)découverts dans un chapitre précédent. On pourrait en quelque sorte inverser le point de vue et reconstruire complètement la géométrie plane à partir de considérations purement algébriques, mais ce n'est pas la démarche adoptée ici.

I Points et vecteurs

1° Coordonnées dans un plan affine euclidien

a) Soit \mathcal{P} un plan affine euclidien. C'est d'abord un ensemble dont on appelle *points* les éléments, que l'on note A, B , etc. Il y a plus : quand on se donne un couple de points $(A, B) \in \mathcal{P}^2$, on forme un *vecteur* \overrightarrow{AB} . Pour quatre points A, B, C, D , les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont égaux si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme, c'est-à-dire que les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu (figure 1).

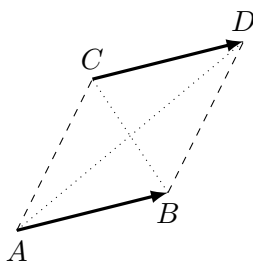


FIGURE 1 – Vecteurs égaux

Le vecteur \overrightarrow{AA} ne dépend pas du point A , on le note $\vec{0}$ et on l'appelle *vecteur nul*. On a deux opérations sur les vecteurs : la *somme* et le *produit par un réel* (figure 2). Le vecteur nul est neutre pour l'addition et absorbant pour le produit par un réel.

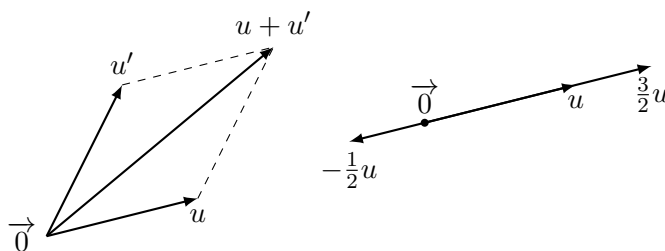


FIGURE 2 – Somme de deux vecteurs, produit d'un vecteur par un réel

S'agissant d'un plan *euclidien*, on a de plus une façon de mesurer les distances ou mieux, un *produit scalaire*. Le produit scalaire de deux vecteurs u et v est un réel noté $\langle u, v \rangle$. Les propriétés suivantes¹ sont satisfaites pour des vecteurs u, u', v et v' et des réels λ, λ' quelconques :

- (i) $\langle u, u \rangle \geq 0$;
- (ii) $\langle u, u \rangle = 0$ si et seulement si $u = \vec{0}$;

1. Connues du lycée mais pas revues en amph.

- (iii) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$;
- (iv) $\langle \lambda u + \lambda' u', v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \lambda' \langle u', v \rangle$;
- (v) $\langle u, \lambda v + \lambda' v' \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \lambda' \langle u, v' \rangle$ (cela résulte de (iii) et (iv)).

Ce produit scalaire permet de définir la *norme* d'un vecteur u :

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

et la *distance* AB entre deux points A et B :

$$AB = \|\vec{AB}\|.$$

b) Bases, repères et coordonnées

On fixe un repère $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2)$. Ici, O est un point de \mathcal{P} et (e_1, e_2) est une *base*² de l'espace des vecteurs. Cela signifie que pour tout vecteur u , il existe un unique couple (x, y) tel que

$$u = xe_1 + ye_2.$$

Par conséquent, pour tout point M de \mathcal{P} , il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\vec{OM} = xe_1 + ye_2.$$

On dit que le couple (x, y) , que je préfère noter $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, est le couple des *coordonnées* de u ou de M . Il dépend du repère \mathcal{R} . Le lien entre coordonnées d'un vecteur et des points est le suivant : si A a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$, B a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$, alors \vec{AB} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$. Cela provient du calcul :

$$\vec{AB} = -\vec{OA} + \vec{OB} = -(x_A e_1 + y_A e_2) + (x_B e_1 + y_B e_2) = (x_B - x_A)e_1 + (y_B - y_A)e_2.$$

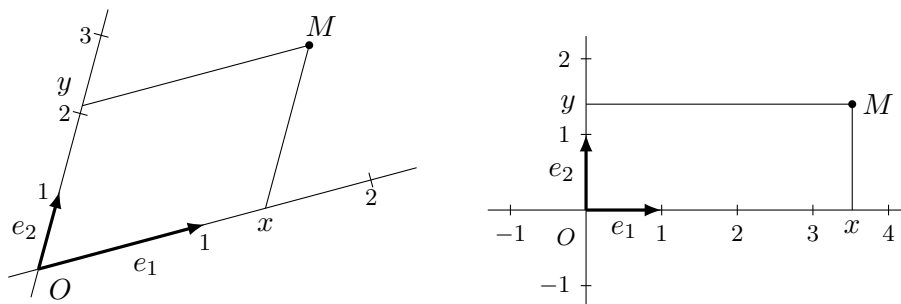


FIGURE 3 – Repère et repère orthonormé

c) Repères orthonormés

En fait, comme on a un produit scalaire sur les vecteurs, on peut montrer qu'il existe des repères *orthonormés*, c'est-à-dire des repères (O, e_1, e_2) tels que :

$$\langle e_1, e_2 \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle e_1, e_1 \rangle = 1 = \langle e_2, e_2 \rangle.$$

On fixe désormais un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2)$ du plan.

Soient u et u' des vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On calcule le produit scalaire :

$$\langle u, u' \rangle = \langle xe_1 + ye_2, x'e_1 + y'e_2 \rangle = xx' \langle e_1, e_1 \rangle + xy' \langle e_1, e_2 \rangle + yx' \langle e_2, e_1 \rangle + yy' \langle e_2, e_2 \rangle = xx' + yy'.$$

2. La notion sera précisée dans le chapitre suivant et au S2.

2° Affixes

Rappelons une dernière fois que l'on a choisi un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2)$ du plan affine euclidien \mathcal{P} . Étant donné un point M de \mathcal{P} (resp. un vecteur u) ayant pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on appelle *affixe* de M (resp. de u) le nombre complexe

$$z = x + yi.$$

Lemme. (i) Soient u et u' deux vecteurs ayant pour affixes respectifs³ z et z' . Alors :

$$\langle u, u' \rangle = \operatorname{Re}(z\bar{z}').$$

(ii) Soient A et B des points d'affixes respectifs z_A et z_B . Alors, la distance entre ces deux points est :

$$AB = |z_A - z_B|.$$

Démonstration. (i) Notons $z = x + yi$ et $z' = x' + y'i$ avec $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$. On a :

$$\operatorname{Re}(z\bar{z}') = \operatorname{Re}((x + yi)\overline{x' - y'i}) = \operatorname{Re}(xx' + yy' + (yx' - xy')i) = xx' + yy'.$$

(ii) En prenant $u = u' = \overrightarrow{AB}$, vecteur qui a pour affixe $z_B - z_A$, on a :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\operatorname{Re}((z_B - z_A)\overline{z_B - z_A})} = \sqrt{|z_B - z_A|^2} = |z_B - z_A|.$$

3° Angles

La définition n'est motivée que si on sait ou si on croit qu'il existe une notion d'angles, que l'on peut ajouter ou retrancher des angles, etc.

Définition. Soient u et u' deux vecteurs non nuls d'affixes respectifs z et z' . On appelle *mesure de l'angle défini par* (u, u') et on note $\widehat{(u, u')}$, ou plus simplement (u, u') , tout argument du nombre complexe non nul $\frac{z'}{z}$.

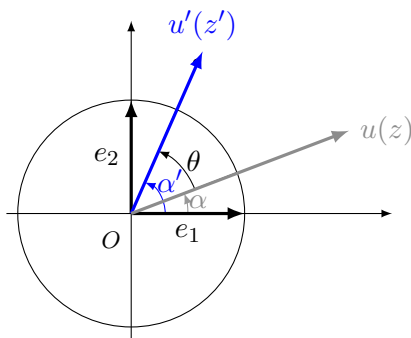


FIGURE 4 – Définition des angles et argument

Esquisse de justification (figure 4). Soit α un argument de $z = \frac{z}{1}$. C'est, par définition, une mesure de l'angle (e_1, u) ; *idem* pour α' , un argument de z' , qui est aussi une mesure de (e_1, u') . Mais alors, si on « croit » à l'addition des angles, on doit avoir :

$$(u, u') = -(e_1, u) + (e_1, u') = -\arg \frac{z}{1} + \arg \frac{z'}{1} = \arg \frac{z'}{z} [2\pi].$$

Ce n'est donc pas si extravagant.

3. En effet, contre toute attente, *affixe* est un mot masculin.

Proposition. Soient A, B, C, D quatre points d'affixes respectifs z_A , etc. On suppose que $A \neq B$ et que $C \neq D$. Alors une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ est :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} [2\pi].$$

II Transformations géométriques

Rappelons une post-ultime fois que le plan \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormé (O, e_1, e_2) . On va considérer un certain nombre de transformations du plan, c'est-à-dire de bijections de \mathcal{P} dans \mathcal{P} . Si F est une de ces transformations, on lui associe une bijection $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de la façon suivante : pour $z \in \mathbb{C}$, on considère le point M d'affixe z et on définit $f(z)$ comme l'affixe de l'image M' de M par F .

En termes plus sophistiqués, si on note $\mathbf{A} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ la bijection qui à un point M de \mathcal{P} , associe son affixe $z = \mathbf{A}(M)$, la correspondance entre F et f est (vérifier !) : $f = \mathbf{A} \circ F \circ \mathbf{A}^{-1}$ ou, ce qui revient au même : $F = \mathbf{A}^{-1} \circ f \circ \mathbf{A}$. Il revient au même de se donner F ou f .

Dans cette situation, on dira que « f est l'écriture complexe de F » ou que « F est la transformation géométrique correspondant à f ».

1° Translations

a) Définition

Définition. Soit u un vecteur. On appelle translation de vecteur u et on note (ici, entre nous) T_u l'application de \mathcal{P} dans \mathcal{P} définie ainsi. L'image d'un point M est l'unique point M' tel que

$$\overrightarrow{MM'} = u.$$

Le lemme suivant est facile et utile mais il n'a pas été vu en amphi.

Lemme. (i) L'identité est la translation de vecteur $\vec{0}$.

(ii) La composée de deux translations de vecteurs u et u' est la translation de vecteur $u + u'$.

(iii) Si u est un vecteur quelconque, T_u est bijective et la bijection réciproque est : $T_u^{-1} = T_{-u}$.

Démonstration. (i) Si $u = \vec{0}$, on a, pour $M \in \mathcal{P}$ et $M' = T_{\vec{0}}(M) : \overrightarrow{MM'} = \vec{0}$, i.e. $M = M'$.

(ii) Pour M quelconque, $M' = T_u(M)$ et $M'' = T_{u'}(M')$, on a : $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = u + u'$.

(iii) En prenant $u' = -u$, on voit que $T_u \circ T_{-u} = T_{\vec{0}} = \text{Id}_{\mathcal{P}}$ et, de même : $T_{-u} \circ T_u = \text{Id}_{\mathcal{P}}$.

b) Écriture complexe

Lemme. Soit u un vecteur, soit w son affixe et soit T_u la translation de vecteur u . Alors, si M est un point de \mathcal{P} d'affixe z et si z' est l'affixe de son image $M' = T_u(M)$, on a :

$$z' = z + w.$$

Autrement dit, l'écriture complexe de T_u est $t_u : z \mapsto z + w$.

Démonstration. Avec ces notations, on a : $\overrightarrow{MM'} = u$, ce qui donne : $z' - z = w$. Terminé.

2° Homothéties

a) Définition

Définition. Soit A un point et k un réel non nul. On appelle *homothétie* de centre A et de rapport k et on note (ici, entre nous) $H_{A,k}$ l'application de \mathcal{P} dans \mathcal{P} définie ainsi. L'image d'un point M est l'unique point M' tel que

$$\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}.$$

Remarque. Si $k \neq 1$, l'homothétie $H_{A,k}$ admet un unique point fixe : A . En effet, M est fixe SSI $M' = M$ SSI $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM}$ SSI $k\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM}$ SSI $(1-k)\overrightarrow{AM} = \vec{0}$ SSI $\overrightarrow{AM} = \vec{0}$ (car $1-k \neq 1$).

Le lemme suivant est facile et utile mais il n'a pas été vu en amphi.

- Lemme.** (i) Pour tout point A , l'identité est l'homothétie de centre A et de rapport 1.
(ii) La composée de deux homothéties de même centre A et de rapports k et k' est l'homothétie de centre A ayant pour rapport le produit des rapports kk' .
(iii) Une homothétie de centre A et de rapport k est bijective et la bijection réciproque est l'homothétie de centre A et de rapport $1/k$.

Démonstration. (i) Si $k = 1$, on a : $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM}$ donc $M' = H_{A,k}(M) = M$ pour tout M .

(ii) Si $M' = H_{A,k}(M)$ et $M'' = H_{A,k'}(M')$, alors on a : $\overrightarrow{AM''} = k'\overrightarrow{AM'} = k'k\overrightarrow{AM}$.

(iii) Cela résulte de (i) et (ii) en prenant $k' = 1/k$.

b) Écriture complexe

Lemme. Soient A un point, z_A son affixe, k un réel non nul et soit $H_{A,k}$ l'homothétie de centre A et de rapport k . Alors, si M est un point de \mathcal{P} d'affixe z et si z' est l'affixe de son image $M' = H_{A,k}(M)$, on a :

$$z' = k(z - z_A) + z_A = kz + (1-k)z_A.$$

Autrement dit, l'écriture complexe de $H_{A,k}$ est $h_{A,k} : z \mapsto kz + (1-k)z_A$.

Démonstration. Avec ces notations, on a : $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$, d'où : $z' - z_A = k(z - z_A)$. Terminé.

Exercice. Soient k un réel, b un complexe et soit f l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par : $f(z) = kz + b$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Si $k = 1$, alors f est l'écriture complexe de la translation de vecteur ayant pour affixe b . Si $k \neq 1$, alors f a un unique point fixe $w = b/(1-k)$ et c'est l'écriture complexe de l'homothétie de centre A , le point d'affixe w , et de rapport k .

Exercice (pas vu en amphi). Soient H et H' deux homothéties de rapports k et k' et de centres quelconques. Montrer que la composée $H \circ H'$ est une translation si $kk' = 1$ et que c'est une homothétie si $kk' \neq 1$. (Utiliser l'exercice précédent.)

3° Rotations

a) Définition

Définition. Soit A un point et θ un réel. On appelle *rotation* de centre A et d'angle θ et on note (ici, entre nous) $R_{A,\theta}$ l'application de \mathcal{P} dans \mathcal{P} définie ainsi. L'image d'un point M est l'unique point M' tel que

$$\begin{cases} AM' = AM \\ (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \theta [2\pi] \end{cases} \text{ si } M \neq A.$$

Est-ce bien défini ? Existe-t-il toujours un tel point M' ? Est-il bien unique ? Pour le montrer, le plus simple est de passer en complexes ! Il n'y a pas de problème si $M = A$, alors l'image est A ($AM' = 0$ donne $M' = A$).

Soit M un point distinct de A , on note z son affixe et z_A celui de A . Soit encore M' un autre point, différent de A , d'affixe z' . Vu que $z \neq z_A$, on a :

$$AM' = AM \iff |z' - z_A| = |z - z_A| \iff \left| \frac{z' - z_A}{z - z_A} \right| = 1.$$

D'autre part, on traduit la condition portant sur les angles en termes d'arguments :

$$\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'} \right) = \theta [2\pi] \iff \arg \frac{z' - z_A}{z - z_A} = \theta [2\pi].$$

Autrement dit, on connaît le module et l'argument de $\frac{z' - z_A}{z - z_A}$:

$$\frac{z' - z_A}{z - z_A} = e^{i\theta},$$

ce qui est équivalent à :

$$z' = e^{i\theta}(z - z_A) + z_A.$$

Cela prouve d'une part que la définition est bien formée et nous donne l'écriture complexe d'une rotation.

Lemme. Soient A un point, z_A son affixe, θ un réel et $R_{A,\theta}$ la rotation de centre A et d'angle θ . Alors, si M est un point de \mathcal{P} d'affixe z et si z' est l'affixe de son image $R_{A,\theta}(M)$, on a :

$$z' = e^{i\theta}(z - z_A) + z_A.$$

Autrement dit, l'écriture complexe de $R_{A,\theta}$ est $r_{A,\theta} : z \mapsto e^{i\theta}(z - z_A) + z_A$.

Le lemme suivant est facile et utile mais il n'a pas été vu en amphi.

Lemme. (i) Pour tout point A , l'identité est la rotation de centre A et d'angle nul.

(ii) La composée de deux rotations de même centre A et d'angles θ et θ' est la rotation de centre A ayant pour angle la somme des angles $\theta + \theta'$.

(iii) Une rotation de centre A et d'angle θ est bijective et la bijection réciproque est la rotation de centre A et d'angle $-\theta$.

Démonstration. (i) Si $\theta = 0$, on a : $r_{A,\theta}(z) = e^{0i}(z - z_A) + z_A = z$.

(ii) Si $z' = r_{A,\theta}(z) = e^{i\theta}(z - z_A) + z_A$ et $z'' = r_{A,\theta'}(z') = e^{i\theta'}(z' - z_A) + z_A$, alors on a : $z'' = e^{i\theta'}(z' - z_A) + z_A = e^{i\theta'}(e^{i\theta}(z - z_A)) + z_A = e^{i(\theta+\theta')}(z - z_A) + z_A$.

(iii) Cela résulte de (i) et (ii) en prenant $\theta' = -\theta$.

Exercice (pas vu en amphi). Soient a un complexe de module 1, b un complexe et soit f l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par : $f(z) = az + b$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Si $a = 1$, alors f est l'écriture complexe de la translation de vecteur ayant pour affixe b . Si $a \neq 1$, alors f a un unique point fixe $w = b/(1 - a)$ et c'est l'écriture complexe de la rotation de centre A ayant pour affixe w et d'angle $\arg(a)$.

4° Similitudes directes

a) Définition

Définition. Soient A un point, k un réel strictement positif⁴ et θ un réel. On appelle *similitude directe* de centre A , de rapport k et d'angle θ et on note (ici, entre nous) $S_{A,k,\theta}$ l'application de \mathcal{P} dans \mathcal{P} définie ainsi. L'image d'un point M est l'unique point M' tel que

$$\begin{cases} AM' = k \cdot AM \\ (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \theta [2\pi] \quad \text{si } M \neq A. \end{cases}$$

Est-ce bien défini? Y a-t-il toujours un unique point M' ? Il n'y a pas de problème si $M = A$, alors l'image est A ($AM' = 0$ donne $M' = A$).

Soit $M \neq A$, soit z son affixe et z_A celui de A . Soit $M' \neq A$ un point quelconque d'affixe z' . Vu que $z \neq z_A$ et $k > 0$, on a :

$$AM' = k \cdot AM \iff |z' - z_A| = k|z - z_A| \iff \left| \frac{z' - z_A}{z - z_A} \right| = k.$$

D'autre part, on traduit la condition portant sur les angles en termes d'arguments :

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \theta [2\pi] \iff \arg \frac{z' - z_A}{z - z_A} = \theta [2\pi].$$

Autrement dit, on connaît le module et l'argument de $\frac{z' - z_A}{z - z_A}$:

$$\frac{z' - z_A}{z - z_A} = ke^{i\theta},$$

ce qui est équivalent à :

$$z' = ke^{i\theta}(z - z_A) + z_A.$$

Cela prouve que la définition est bien formée et nous donne l'écriture complexe d'une rotation.

Lemme. Soient A un point, z_A son affixe, k un réel strictement positif, θ un réel et soit $S_{A,k,\theta}$ la similitude directe de centre A , de rapport k et d'angle θ . Alors, si M est un point de \mathcal{P} d'affixe z et si z' est l'affixe de son image $M' = S_{A,k,\theta}(M)$, on a :

$$z' = ke^{i\theta}(z - z_A) + z_A.$$

Autrement dit, l'écriture complexe de $S_{A,k,\theta}$ est $s_{A,k,\theta} : z \mapsto ke^{i\theta}(z - z_A) + z_A$.

Exercice. Vérifier que :

- si $k = 1$ et $\theta = 0$, $S_{A,k,\theta}$ est l'identité ;
- si $\theta = 0 [2\pi]$, $S_{A,k,\theta} = H_{A,k}$; si $\theta = \pi [2\pi]$, $S_{A,k,\theta} = H_{A,-k}$;
- si $k = 1$, $S_{A,k,\theta} = R_{A,\theta}$.

4. Noter la différence avec le cas des homothéties! Ici, on n'autorise pas $k < 0$.

b) Similitudes directes et applications affines complexes

Toutes les transformations que l'on a vues jusqu'à présent ont une écriture complexe de la forme $z \mapsto az + b$, c'est-à-dire une « applications affines complexes » :

- c'est une translation SSI $a = 1$;
- c'est une homothétie SSI $a = k \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$;
- c'est une rotation SSI $a = e^{i\theta}$ a pour module 1 ;
- pour une similitude directe, $a = ke^{i\theta}$ et $b = z_A - ke^{i\theta}z_A$.

On va terminer la classification.

Proposition. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto az + b$. De deux choses l'une :

- (a) si $a = 1$, alors f est l'écriture complexe de la translation de vecteur d'affixe b ;
- (b) si $a \neq 1$, alors f a un unique point fixe $w = b/(1 - a)$ et f est la similitude directe de centre A ayant pour affixe w , de rapport $k = |a|$ et d'angle $\theta = \arg a$.

Démonstration. On a déjà traité et retraité le cas $a = 1$. Supposons $a \neq 1$. Soit z un complexe. Alors, comme $1 - a \neq 0$:

$$f(z) = z \iff z = az + b \iff (1 - a)z = b \iff z = \frac{b}{1 - a}.$$

Notons $w = b/(1 - a)$. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $z' = f(z)$. Écrivons alors côte à côte⁵ :

$$\begin{cases} z' = az + b \\ w = aw + b \end{cases} \quad \text{d'où} \quad z' - w = a(z - w).$$

En termes géométriques, si A est le point d'affixe w et si $z \neq w$, on a en séparant module et argument : $AM' = |a| \cdot AM$ et $(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM}) = \theta [2\pi]$.

c) Invariants par une similitude directe

Proposition. Soit S une similitude directe du plan. Alors, pour tous points A, B, C, D du plans tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, on a, en notant $A' = S(A)$, etc. :

- (i) dilatation des distances : il existe $k > 0$ indépendant de A et B tel que $A'B' = k \cdot AB$;
- (ii) préservation des rapports de distances : $\frac{C'D'}{A'B'} = \frac{CD}{AB}$;
- (iii) préservation des angles orientés : $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) [2\pi]$.

Démonstration. Soit s l'écriture complexe de S . Par la proposition précédente, il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $s(z) = az + b$. Alors, en notant z_A l'affixe de A , etc., il vient :

$$|z_{B'} - z_{A'}| = |az_B + b - (az_A + b)| = |a| |z_B - z_A|,$$

d'où la propriété (i) avec $k = |a|$. D'autre part, on calcule :

$$\frac{z_{D'} - z_{C'}}{z_{B'} - z_{A'}} = \frac{az_D + b - (az_C + b)}{az_B + b - (az_A + b)} = \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}.$$

En prenant le module, on obtient (ii) ; en prenant l'argument, il nous sort (iii).

La « réciproque » est plus difficile et sera admise.

5. C'est une idée importante, la *linéarité*, qui nous occupera au S2.

Théorème. Soit S une bijection du plan dans lui-même qui préserve l'alignement et les angles orientés, c'est-à-dire :

- (i) si A, B, C sont alignés, alors $S(A), S(B)$ et $S(C)$ sont alignés ;
- (ii) si A, B, C, D sont quatre points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ et si A', B', C', D' sont leurs images, alors $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) [2\pi]$.

Alors S est une similitude directe : il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que s , l'écriture complexe de S soit :

$$\forall z \in \mathbb{C}, s(z) = az + b.$$

Théorème. Soit S une bijection du plan dans lui-même qui préserve les rapports de distance : il existe un réel $k > 0$ tel que pour tous points distincts A, B d'images respectives A', B' , on a : $A'B' = k AB$.

Alors S est une similitude : il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que s , l'écriture complexe de S soit de l'une des deux formes suivantes :

$$\forall z \in \mathbb{C}, s(z) = az + b \quad \text{ou} \quad \forall z \in \mathbb{C}, s(z) = a\bar{z} + b.$$