f) Pour $a \neq \pm 1$ on remarque que

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

on peut encore écrire en posant $\begin{cases} a = \cos\theta \\ b = \sin\theta \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

matrice réflexion par rapport à H

matrice de la rotation d'axe dirigé et orienté par f_1 et d'angle θ

□

Exemples : 1) Soit u l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$

On vérifie que A est orthogonale (soit en vérifiant ${}^tAA = I$, soit que les colonnes de A forment une famille orthonormée). De plus A est symétrique (${}^tA = A$) donc c'est une symétrie orthogonale. De plus $\det A = -1$ donc c'est une réflexion. On calcule

$$\mathrm{Ker}\,(A - I) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

u est donc la réflexion par rapport au plan

$$H = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$