c) Soit $\{f_2, f_3\}$ une base orthonormée de H

et $\quad \mathrm{Mat}_{\{f_2,f_3\}}(u_{|H}) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice

de $u_{|H}$ dans cette base. On en déduit

que $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une base orthonormée de E

et $\quad \mathrm{Mat}_{\{f_1,f_2,f_3\}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix}$

Puisque $\det u = -1$ on déduit que

$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = 1$ et donc $u_{|H} \in SO(H)$

c'est donc une rotation de H et donc $c = -b$

et $d = a$ avec $a^2 + b^2 = 1$.

La matrice de u dans la base $\{f_1, f_2, f_3\}$ est donc

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a^2 + b^2 = 1 .$$

Quitte à échanger f_2 et f_3 on peut supposer $\{f_1, f_2, f_3\}$ directe.

d) Si $a = 1$ on a $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc

u est une réflexion par rapport à H.

e) Si $a = -1$ $\qquad u = -id$