Classification complète de O(E) en dim 3

<u>proposition</u> : Soit $u \in O(E)$ tq $u \notin SO(E)$. Alors u est une réflexion ou $-id$ ou bien la composée d'une réflexion et d'une rotation où l'axe de la rotation est orthogonal au plan de la réflexion.

<u>preuve</u>: a) On montre d'abord que -1 est valeur propre de u : on regarde l'application polynomiale

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \det(u + x\,id)$$

$\varphi(x)$ est un polynôme de degré 3, de coefficient dominant 1 et $\varphi(0) = \det u = -1$.

De plus $\varphi(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc il existe

$x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 > 0$ tq $\varphi(x_0) = 0$. Puisque les seules valeurs propres réelles d'une isométrie sont -1 ou 1 alors $x_0 = 1$. Il existe donc un vecteur f_1 qu'on peut choisir unitaire tel que $u(f_1) = f_1$.

b) On pose $H = \text{Vect}\{f\}^{\perp}$. Comme $\{f\}$ est stable par u alors H aussi. L'application $u_{|H}$ (u restreint à H) est donc un endomorphisme de H.