Cours 1 avril 2020

Poly "Géométrie affine"

1.2 Exemple test

a) $\vec{E} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ,\ x+y+z = 0 \}$

est clairement un $\mathbb{R}$-e.v. C'est le plan

Engendré par $\vec{E} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

par exemple $(0,0,0) \notin E$.

b) Voyons que $\phi(E \times E) \subseteq \vec{E}$: soient

$p=(x_1,y_1,z_1), q=(x_2,y_2,z_2) \in E$ alors

$$\phi\big((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\big) = (x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$$

$$\begin{aligned} \phi(p,q) \in \vec{E} &\iff (x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1) \in \vec{E} \\ &\iff x_2-x_1 + y_2-y_1 + z_2-z_1 = 0 \\ &\iff (x_2+y_2+z_2) - (x_1+y_1+z_1) = 0 \end{aligned}$$

On sait que $x_2+y_2+z_2 = x_1+y_1+z_1 = 1$

donc on a bien $(x_2+y_2+z_2) - (x_1+y_1+z_1) = 0$

et $\phi(p,q) \in \vec{E}$.

Pour montrer que E est un espace affine

"dirigé" par E (d'espace vectoriel sous-jacent $\vec{E}$)

il faut vérifier les propriétés de la définition 1.1

1) Soient $(p,q,r) \in E^3$ de coord. respectives $(x_p,y_p,z_p), \dots$

$$\begin{aligned} \vec{pq} + \vec{qr} &= \phi(p,q) + \phi(q,r) \\ &= (x_q-x_p,\ y_q-y_p,\ z_q-z_p) + (x_r-x_q,\ y_r-y_q,\ z_r-z_q) \\ &= (x_r-x_p,\ y_r-y_p,\ z_r-z_p) \\ &= \phi(p,r) = \vec{pr} \end{aligned}$$