$u_{|P^\perp}$ est donc un endomorphisme et il est encore orthogonal. Par hypothèse de récurrence il existe une bon de $P^\perp$ dans laquelle la matrice de $u_{|P^\perp}$ a la forme voulue. On juxtapose cette base et une bon de P et (quitte à réordonner les vecteurs) on a une base de E pour laquelle la matrice de u est de la forme $(*)$.

2) u n'admet pas de valeurs propres réelles : les racines de son polynôme minimal sont complexes conjuguées 2 à 2. Soit λ une telle valeur propre, notons $A = \mathrm{Mat}(u)$ dans une base quelconque et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé à λ $(x \neq 0)$.

on a $\quad Ax = \lambda x \quad$ et en prenant les conjugués

$\quad\quad A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x} \quad$ ($\bar{A} = A$ car à coeff. réels)

On pose $Y = x + \bar{x}$ $(Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et on calcule

$AY = A(x+\bar{x}) = \lambda x + \bar{\lambda}\bar{x}$ et

$A^2 Y = A(\lambda x + \bar{\lambda}\bar{x}) = \lambda^2 x + \bar{\lambda}^2 \bar{x} = (\lambda + \bar{\lambda}) AY - \lambda\bar{\lambda} Y$

on remarque que $\lambda + \bar{\lambda}$ et $\lambda\bar{\lambda}$ sont réels et donc $F = \mathrm{Vect}\{Y, AY\} \subseteq \mathbb{R}^n$ est stable par A.