preuve : On procède par récurrence sur n.

a) Si $n = 1$ $u = id$ ou $u = -id$ donc évident.

Si $n = 2$ on rappelle que u est une réflexion ou une rotation et donc dans une bon appropriée sa matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, -I$ ou $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in]-\pi, \pi[$

↙ si réflexion ↓ rotation angle π ↘ rotation.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ $\dim E = n$ et $u \in O(E)$.

On suppose le résultat vrai pour tout espace euclidien de dimension p avec $1 \leq p < n$.

On sépare deux cas :

1) u admet des valeurs propres réelles :

alors 1 (ou respectivement -1) est valeur propre de u. On pose $P = \text{Ker}(u - id)$ (resp. $P = \text{Ker}(u + id)$) et on a

$E = P \oplus P^\perp$ avec $\dim P^\perp < n$

(car $P \neq \{0\}$). Si $u = id$ (resp. $u = -id$) la matrice de u a la forme voulue. On peut donc supposer $u \neq \pm id$ et donc $P^\perp \neq \{0\}$.

P est un espace propre de u donc stable par u et alors $P^\perp$ est aussi stable par u.