**Exercice 1**

1) Soit $x$ un réel avec $1 < x$. On effectue sur $[1, x]$ une intégration par parties en utilisant deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ notées $u$ et $v$ et définies respectivement par $u(t) = \dfrac{1}{t^a}$ et $v(t) = -\sin t$. On obtient :

$$\int_1^x \frac{\cos t}{t^a}\,dt = a\int_1^x \frac{\sin t}{t^{a+1}}\,dt + \frac{\sin x}{x^a} - \sin 1.$$

Quant $t$ tend vers $+\infty$, on dispose de la relation de comparaison

$$\frac{|\sin t|}{t^{a+1}} = O\left(\frac{1}{t^{a+1}}\right)$$

dans laquelle les deux fonctions comparées sont positives, et celle figurant à droite est intégrable sur $[1, +\infty[$. Celle figurant à gauche est donc elle aussi intégrable (on notera si besoin qu'elle est continue donc intégrable sur tout segment de $[1, +\infty[$), et c'est donc aussi le cas de $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^{a+1}}$, dont l'intégrale calculée de 1 à $x$ converge donc quand $x$ tend vers $+\infty$.

Enfin $\dfrac{\sin x}{x^a} = O\left(\dfrac{1}{x^a}\right) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

On en conclut que $\displaystyle\int_1^x \frac{\cos t}{t^a}\,dt$ admet une limite finie quand $x$ tend vers l'infini, comme somme de trois termes admettant chacun une limite finie.

2) Soit $y$ un réel avec $1 < y$. Sur l'intervalle $[1, y]$, on effectue le changement de variables $t = s^b$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ ainsi que sa bijection réciproque. On écrit $s = t^{1/b}$, puis $ds = \dfrac{1}{b}t^{(1/b)-1}\,dt$, ce qui amène à écrire :

$$\int_1^y \cos(s^b)\,ds = \frac{1}{b}\int_1^{y^b} \frac{\cos t}{t^{1-(1/b)}}\,dt.$$

On observe en outre que, puisque $1 < b$, on a aussi $\frac{1}{b} < 1$ puis $0 < 1 - \frac{1}{b}$.

La question 1 garantit alors l'existence d'une limite finie pour l'expression $\displaystyle\int_1^x \frac{\cos t}{t^{1-(1/b)}}\,dt$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

Enfin $y^b$ tend vers $+\infty$ quand $y \to +\infty$. Par composition des limites, l'expression $\displaystyle\int_1^{y^b} \frac{\cos t}{t^{1-(1/b)}}\,dt$ admet elle aussi une limite finie quand $y$ tend vers $+\infty$ : l'intégrale à étudier converge donc.

**Exercice 2**

Notons préalablement que pour tout réel $a$, la fonction $f_a$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$.

Le cas particulier où $a = 0$ pour lequel $f_0 = 0$ est dégénéré et mérite d'être traité à part. Observons donc préalablement que $f_0$, nulle, est évidemment intégrable.

Ceci posé, soit $a$ un réel non nul.

Quand $t$ tend vers $+\infty$, on peut écrire :

$$(t+1)^a - t^a = \left[t\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]^a - t^a = t^a\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^a - 1\right] = t^a\left(\frac{a}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right)\right) = at^{a-1} + o\left(t^{a-1}\right) \sim at^{a-1}$$

tandis que, plus simplement, le dénominateur $1 - e^{-\sqrt{t}}$ tend vers 1 et est donc équivalent à 1.

On en conclut que pour $t$ tendant vers $+\infty$, on dispose de l'équivalent :

$$|f_a(t)| \sim |a|t^{a-1}$$

qui rapproche deux fonctions à valeurs positives et dans laquelle la fonction de droite est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $a < 0$. Il en est donc de même de $|f_a|$ et donc aussi de $f_a$.

Supposons désormais $a < 0$ puis abordons l'étude sur $]0, 1]$.
Alors quand $t$ tend vers $0^+$, $(t+1)^a - t^a = 1 + o(1) - t^a = -t^a + o(t^a) \sim -t^a$, tandis que $\sqrt{t}$ tend aussi vers $0^+$ ce qui permet d'assurer que $1 - e^{-\sqrt{t}} = 1 - (1 - \sqrt{t} + o(\sqrt{t})) = \sqrt{t} + o(\sqrt{t}) \sim \sqrt{t}$.
On en conclut que pour $t$ tendant vers $0^+$ on dispose de l'équivalent :

$$|f_a(t)| \sim \frac{t^a}{\sqrt{t}}$$

qui rapproche deux fonctions à valeurs positives et dans laquelle la fonction de droite est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $-\dfrac{1}{2} < a$. Il en est donc de même de $|f_a|$ et donc aussi de $f_a$.
En synthétisant toute la discussion qui précède, on conclut que quand $a$ varie dans $\mathbb{R}$, $f_a$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $-\dfrac{1}{2} < a \leq 0$.

**Exercice 3**

Notons préalablement que la fonction $g$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$.
1) a) Quand $x$ tend vers $+\infty$,

$$\ln(x^2 + x) = \ln\left[x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] = 2\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 2\ln x + o(1) = 2\ln x + o(\ln x) \sim 2\ln x.$$

b) Quand $x$ tend vers $+\infty$, on peut donc écrire :

$$g(x) \sim \frac{2\ln x}{x^{7/2}} e^{-3x}$$

dont on déduit que

$$|g(x)| = o\left(\frac{x}{x^{7/2}} e^{-3x}\right) = o\left(\frac{e^{-3x}}{x^{5/2}}\right) = o\left(e^{-3x}\right).$$

Les deux fonctions comparées sont à valeurs positives, et celle de droite est intégrable sur $[1, +\infty[$. C'est donc aussi le cas de $|g|$ ou, ce qui revient au même, de $g$.
2) Quand $x$ tend vers $0^+$, on écrit :

$$\ln(x + x^2) = \ln[x(1 + x)] = \ln x + \ln(1 + x) = \ln x + o(1) = \ln x + o(\ln x) \sim \ln x$$

puis

$$x - \sin x = x - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{6}$$

et enfin

$$e^{-3x} \sim 1.$$

En les rapprochant, on sait désormais que :

$$|g(x)| \sim \frac{1}{6}\left(\frac{|\ln x|}{x^{1/2}}\right)$$

dont on déduit que

$$|g(x)| = o\left(\frac{1}{x^{3/4}}\right).$$

Les deux fonctions comparées sont à valeurs positives, et celle de droite est intégrable sur $]0, 1]$. C'est donc aussi le cas de $|g|$ ou, ce qui revient au même, de $g$.