Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automone 2023-2024

Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques — 17 septembre 2023

Devoir surveillé 1

Exercice 1

1. On remarque que $f = \frac{u'}{u^2}$, où on a posé $u(x) = 1 + x^2$ pour $x \in \mathbf{R}$. Donc f est la dérivée de la fonction
$$F : x \mapsto -\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{x^2+1}$$

2. Déterminons une primitive de la fonction définie par $f(x) = \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2}$ pour $x \in]0, +\infty[$. En intégrant par parties, on obtient
$$\int \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2+1}\ln x + \int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx\right)$$
En décomposant la fraction rationnelle en éléments simples, on trouve
$$\int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)\,dx = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C,$$
où C est une constante réelle. Donc,
$$\int \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2+1}\ln x + \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right) + C$$

3. Observons que f est continue et $f \geq 0$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Ainsi, f est intégrable sur cet intervalle si et seulement si $\lim_{A\to+\infty}\int_1^A f(x)dx \in \mathbf{R}^+$. Soit $A > 1$. Comme f est continue sur l'intervalle $[0, A]$, on peut utiliser le théorème fondamental de l'analyse pour conclure que
$$\int_1^A f(x) = \frac{1}{2}[-\frac{1}{x^2+1}\ln x + \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)]_1^A = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{A^2+1}\ln A + \ln A - \frac{1}{2}\ln(A^2+1) + \frac{1}{2}\ln 2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(A^2+1)}\ln A - \frac{1}{2}\ln(1+A^{-2}) + \frac{1}{2}\ln 2\right) \to \frac{1}{4}\ln 2,$$
lorsque $A \to +\infty$. Ainsi, f est intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{4}\ln 2$.

4. Par croissances comparées, $\lim_{0^+} f = 0$. Donc f est prolongeable par continuité en 0 et f est intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Exercice 2 Donnons une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbf{R}$ pour que l'intégrale généralisée
$$\int_0^{+\infty} \frac{2\cos t - 2 + \ln(1+t^2)}{t^a}\,dt$$
converge. La fonction $f(t) = \frac{2\cos t - 2 + \ln(1+t^2)}{t^a}$ est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, lorsque $t \to 0^+$,
$$2\cos t - 2 + \ln(1+t^2) = 2(1 - t^2/2 + t^4/24 + o(t^4)) - 2 + (t^2 - t^4/2 + o(t^4)) = \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2}\right)t^4 + o(t^4) = -\frac{5}{12}t^4 + o(t^4)$$
Ainsi, lorsque $t \to 0$, $f(t) \sim -\frac{5}{12t^{a-4}}$. En appliquant le critère de Riemann, on conclut que f est intégrable sur l'intervalle $[0, 1]$ si et seulement si $a - 4 < 1$.

Etudions à présent le comportement de f lorsque $t \to +\infty$. Comme
$$\left|\frac{2\cos t - 2}{\ln(1+t^2)}\right| \leq \frac{4}{\ln(1+t^2)},$$

le théorème des gendarmes permet de déduire que

$$\frac{2\cos t - 2 + \ln(1+t^2)}{t^a} \sim \frac{\ln(1+t^2)}{t^a} \sim 2\frac{\ln t}{t^a},$$

lorsque $t \to +\infty$. Par le critère de Bertrand, on déduit que f est intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$ si et seulement si $a > 1$. Au final, f est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $1 < a < 5$.

Exercice 3 Soient e_1, e_2, e_3 trois vecteurs de $\mathbf{R}^4$. On suppose que la famille (e_1, e_2, e_3) est libre. On pose $v_1 = 2e_2 - e_1$, $v_2 = -e_2 + e_3$, $v_3 = -2e_1 + 2e_2 + e_3$.

1. Montrons que F est égal au sous-espace engendré par (v_1, v_2, v_3). Comme v_1, v_2, v_3 sont des combinaisons linéaires des vecteurs e_1, e_2, e_3, ils engendrent un sous-espace vectoriel de F. Comme la famille (e_1, e_2, e_3) est libre, F est de dimension 3. Si (v_1, v_2, v_3) est libre, l'espace que cette famille engendre sera donc lui aussi de dimension 3 et confondu avec F. Or, si pour des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, on a
$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0,$$
alors
$$-(\lambda_1 + 2\lambda_3)e_1 + (2\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3)e_2 + (\lambda_2 + \lambda_3)e_3 = 0.$$
La famille (e_1, e_2, e_3) étant libre, on déduit que $\lambda_1 + 2\lambda_3 = 2\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Ce système se résout aisément et admet pour unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, cqfd.
2. Par la formule de Grassman, $dim(G) = dim(\mathbf{R}^4) - dim(F) = 4 - 3 = 1$.
3. Toute droite vectorielle engendrée par un vecteur e_4 tel que la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) soit libre convient. Par exemple le choix $e_4 = (0, 0, 1, 0)$ est possible, comme on peut le vérifier en échelonnant en colonnes la matrice dont les colonnes sont formées par e_1, e_2, e_3, e_4.

Exercice 4 Soient f_1, f_2, f_3 trois fonctions réelles et dérivables On note F le sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions réelles engendré par la famille (f_1, f_2, f_3).

1. Résolvons l'équation
$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$$
d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3$. Comme $f_2 = o(f_1)$ et $f_3 = o(f_1)$ lorsque $x \to +\infty$, on doit avoir $\lambda_1 = 0$ car sinon on pourrait écrire
$$0 = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 \sim \lambda_1 f_1.$$
Ainsi, $\lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$. Comme $f_3 \sim -\frac{2}{3} f_2$ en $+\infty$, on conclut de même que $\lambda_2 - \frac{2}{3}\lambda_3 = 0$. Et comme $f_3 \sim f_2$ lorsque $x \to -\infty$, on a aussi $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$. On a ainsi obtenu un système de deux équations à deux inconnues (λ_2, λ_3) admettant pour seule solution $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et la famille est donc libre. Elle est donc une base de F puisqu'elle l'engendre aussi.
2. Soit λ un réel, f, g deux fonctions appartenant à F. Alors, $\phi(\lambda f + g) = (\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$ et donc ϕ est linéaire. Observons que $\phi(g_1) = -g_1 \in F$, $\phi(g_2) = g_2 \in F$ et $\phi(g_3) = 2g_3 \in F$. Comme $\mathcal{B}'$ engendre F, $\phi(f) \in F$ pour toute fonction $f \in F$. Ainsi, ϕ est bien un endomorphisme de F.
3. On a $\phi(g_1) = -g_1$, $\phi(g_2) = g_2$ et $\phi(g_3) = 2g_3$. Donc,
$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
4. En résolvant le système
$$\begin{cases} & f_2 - f_3 & = g_1 \\ & 2f_2 + 3f_3 & = g_2 \\ f_1 & -f_2 & = g_3, \end{cases}$$

on trouve facilement que $f_2 = \frac{1}{5}(3g_1 + g_2)$, $f_3 = \frac{1}{5}(-2g_1 + g_2)$ et $f_1 = \frac{3}{5}g_1 + \frac{1}{5}g_2 + g_3$. On en déduit que

$$
\begin{aligned}
\phi(f_1) = f_1' &= (\frac{3}{5}g_1 + \frac{1}{5}g_2 + g_3)' \\
&- \frac{3}{5}g_1 + \frac{1}{5}g_2 + 2g_3 \\
&= -\frac{3}{5}(f_2 - f_3) + \frac{1}{5}(2f_2 + 3f_3) + 2(f_1 - f_2) \\
&= 2f_1 - \frac{11}{5}f_2 + \frac{6}{5}f_3
\end{aligned}
$$

Par des calculs analogues,

$$\phi(f_2) = -\frac{1}{5}f_2 + \frac{6}{5}f_3$$

et

$$\phi(f_3) = \frac{4}{5}f_2 - \frac{4}{5}f_3$$

Ainsi, ϕ se représente dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -11 & -1 & 4 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$