Exercice 1

1) Chanson habituelle. On introduit l'équation homogène et l'équation caractéristique. Les solutions de cette dernière se révèlent non réelles, et ce sont les complexes conjugués $1 \pm 2i$. Sans plus épiloguer, on en déduit que les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda e^x \sin(2x) + \mu e^x \cos(2x)$, λ et μ parcourant $\mathbf{R}$.
On trouve ensuite, au brouillon ou en regardant la copie du voisin, une solution particulière de (E) qu'on aura peut-être pensé à chercher sous la forme $P(x)e^{2x}$ avec P polynomiale du premier degré. La fonction $x \mapsto (x - \dfrac{2}{5})e^{2x}$ suffira à notre bonheur. Y'a plus qu'à sommer : les solutions de (E) sont, avec les paramètres λ et μ continuant à parcourir $\mathbf{R}$ les :

$$x \mapsto (x - \frac{2}{5})e^{2x} + \lambda e^x \sin(2x) + \mu e^x \cos(2x).$$

2) a) Quand $x \to +\infty$, $e^x \sin(2x) = o(e^{2x}) = o(xe^{2x})$ et $e^x \cos(2x) = o(e^{2x}) = o(xe^{2x})$. La solution y peut s'exprimer selon la forme trouvée en question 1) donc s'écrire $y(x) = xe^{2x} + o(xe^{2x})$. Comme la fonction plus simple $x \mapsto xe^{2x}$ elle tend donc vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

b) Non ! Si une solution y était périodique, de période $T > 0$, la suite $(y(kT))_{k \geq 0}$ serait constante. Or elle tend vers $+\infty$ par composition des limites, en raboutant celle trouvée au a) et celle de kT quand k tend vers l'infini.

Exercice 2

1) En dehors de 0 on dira que c'est évident (ou on blablatera en disant que u est un quotient de sommes de carrés de fonctions notoirement continues). Pour t tendant vers 0 ($t \neq 0$), on notera que $\sin t = t + o(t)$, donc $\sin^2 t = t^2 + o(t^2)$, donc $t^2 + \sin^2 t = 2t^2 + o(t^2)$, donc $t^2 + \sin^2 t \sim 2t^2$, donc $u(t) \sim (t^2/2t^2)$. Et donc $u(t) \to u(0)$, ce qui prouve la continuité en 0.

2) a) On remarque préalablement que u est paire de façon particulièrement évidente. Soit ensuite x un réel. En notant s la variable muette apparaissant dans l'expression intégrale de $F(-x)$ puis en effectuant le changement de variable $t = -s$, on obtient :

$$F(-x) = \int_0^{-2x} u(s)\, ds = \int_0^{2x} u(-t)\,(-dt) = -\int_0^{2x} u(t)\, dt = -F(x).$$

b) Notons U une primitive de u, définie sur $\mathbf{R}$. Il en existe, puisque u est une fonction continue sur $\mathbf{R}$. Avec cette notation, pour tout x réel, $F(x) = U(2x) - U(0)$. Cette nouvelle expression de F permet de garantir sa dérivabilité et d'en calculer la dérivée sur $\mathbf{R}$ par : $F'(x) = 2U'(2x) = 2u(x)$, donc $F' = 2u$.

c) Pour tout t réel strictement positif, $-1 \leq \sin t \leq 1$ donc $0 \leq \sin^2 t \leq 1$, donc :
$0 < t^2 \leq t^2 + \sin^2 t \leq t^2 + 1$, donc (en inversant et multipliant par le réel positif t^2) :

$$\frac{t^2}{t^2+1} \leq u(t) \leq \frac{t^2}{t^2} = 1.$$

Vu l'hypothèse selon laquelle $0 < x$, les bornes de l'intervalle $[x, 2x]$ sont placées dans le sens de la lecture, et de plus cet intervalle ne contient pas 0. Intégrer l'encadrement qui précède sur cet intervalle répond à la question, en faisant apparaître une majoration par $\displaystyle\int_x^{2x} dt = x$.
On calcule ensuite sans mal :

$$\int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2+1}\, dt = \int_x^{2x} \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) = [t - \operatorname{Arctan} t]_x^{2x} = (2x - \frac{\pi}{2} + o(1)) - (x - \frac{\pi}{2} + o(1)) = x + o(1).$$

De ceci on déduit l'encadrement $o(1) \leq F(x) - x \leq 0$: la limite demandée existe donc et elle est nulle. Ceci se réécrit selon la formulation un peu convenue : "la droite d'équation $y = x$ est asymptote au graphe de F pour x tendant vers $+\infty$".

Exercice 3

1) Soit g l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On sait que pour tout (x, y, z) dans $\mathbf{R}^3$ l'image $g(x, y, z)$ a ses coordonnées dans la base canonique fournies par le produit matriciel de A par la colonne ${}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$. On prétend avoir calculé ce produit matriciel et retrouvé les composantes de $f(x, y, z)$. On en conclut que $f = g$. Donc f est un endomorphisme et A est sa matrice.

2) Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Par une résolution de système pénible à taper, alors je m'en dispense, on constate rapidement que $(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f \iff \exists \alpha \in \mathbf{R}, (x, y, z) = \alpha(1, 2, -1)$. On en conclut que $\operatorname{Ker} f$ est de dimension 1 et qu'une base en est $((1, 2, -1))$.
Par la formule du rang, le rang de f est donc 2. Les deuxième et troisième colonnes de A nous laissent lire deux vecteurs de $\operatorname{Im} f$, qui ne sont pas proportionnels. Parmi une infinité de réponses justes possibles on peut donc donner d'$\operatorname{Im} f$ la base suivante : $((1, 1, -1), (1, 2, 0))$.

3) La dimension de l'espace vectoriel $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$ est aussi le rang de la famille $((1, 2, -1), (1, 1, -1), (1, 2, 0))$ c'est-à-dire celui de la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On la bidouille rapidement avec quelques opérations élémentaires et le rang se révèle 3. On en conclut que $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = \mathbf{R}^3$. Comme par ailleurs la somme des dimensions de ces deux sous-espaces est égale à la dimension de $\mathbf{R}^3$ et est finie, la somme est directe.

4) a) On remarque que $F = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$.

b) On lit dans un premier temps sur la matrice A les vecteurs $f(e_1) = (3, 4, -2)$ et $f(e_2) = (-1, 1, 1)$. On fait ensuite semblant de calculer $f(e_1)$ et on prétend avoir trouvé e_1, idem pour e_2 (on fait en réalité confiance à l'auteur du corrigé qui, lui, pourrait faire confiance à l'auteur de l'exercice mais non, il a vraiment fait le calcul ce n'était pas un gros effort et ça marche).
Les deux vecteurs suggérés sont dans $\operatorname{Im} f$, qui est par ailleurs de dimension 2 : ils en constituent donc une famille génératrice. Ils sont par ailleurs tous deux dans F, dont on déduit l'inclusion $\operatorname{Im} f \subset F$. Si cette dernière était stricte, elle fournirait une inégalité stricte en termes de dimension, dont on déduirait $\dim F = 3$ puis $F = \mathbf{R}^3$ puis $f = \operatorname{Id}$ puis $A = I$ ce qui n'est pas du tout raisonnable. D'où l'égalité $\operatorname{Im} f = F$.

5) (a) est une base du noyau, tandis que $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de l'image, où ces deux sous-espaces sont en somme directe et ont $\mathbf{R}^3$ pour somme. La concaténation de ces deux bases fournit donc une base de leur somme directe, c'est-à-dire de $\mathbf{R}^3$.

Quant à écrire la matrice ça va tout seul : c'est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

1) Soit $z \in \operatorname{Im}(u^2)$. Alors il existe un x tel que $z = u^2(x)$. On calcule alors $u(z) = u^3(x) = 0_{\mathcal{L}(E)}(x) = 0$. Donc $z \in \operatorname{Ker} u$.

2) On déduit de l'inclusion montrée au 1) l'inégalité : $\operatorname{rg} u^2 \leq \dim \operatorname{Ker} u$. Une fois qu'on a fait ça,
$\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} u^2 \leq \operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u = n$, la dernière égalité par la formule du rang.

3) a) Soit $z \in \operatorname{Im}(u^2)$. Alors il existe un x tel que $z = u^2(x)$. On pose alors $y = u(x)$ et on constate que $z = u(y)$ et donc que $z \in \operatorname{Im} u$. D'où l'inclusion $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u$. Yapluka passer aux dimensions pour répondre à la deuxième moitié de la question.

b) Par l'absurde : si l'inégalité n'était pas stricte, au vu du a) on aurait égalité des sous-espaces $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Im} u^2$. Soit alors z un vecteur de E. Comme $u(z) \in \operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$ il existerait un y tel que $u(z) = u^2(y)$. Comme $u(y) \in \operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$ il existerait un x tel que $u(y) = u^2(x)$. On en déduit que :
$u(z) = u^3(x) = 0_{\mathcal{L}(E)}(x) = 0$. Ceci étant vrai pour tout z, c'est que $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Contradiction !

4) Comme u^2 n'est pas l'application nulle, on a $0 < \operatorname{rg} u^2$, autrement dit $1 \leq \operatorname{rg} u^2$. L'hypothèse $u^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ entraîne par ailleurs aussi que $u \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$: le 3b) est donc applicable d'où $1 \leq \operatorname{rg} u^2 < \operatorname{rg} u$ et donc $2 \leq \operatorname{rg} u$. En additionnant les deux informations, $3 \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} u^2$. L'inégalité dans l'autre sens a été montrée au 2.