Exercice

1) VRAI C'est une question de cours : on connaît la “base canonique” de cet espace vectoriel ; elle est composée des matrices E_{ab} dites “élémentaires” (a variant de 1 à 2 et b variant de 1 à 3) définies comme suit : le coefficient (i, j) de la matrice E_{ab} vaut 1 si $i = a$ et $j = b$ et vaut 0 sinon.

2) VRAI Et très facile : si c'était faux, soit un hypothétique contre-exemple. En multipliant à gauche par A^{-1} l'identité $AB = AC$ et en jouant sur l'associativité, on obtiendrait $B = C$ ce qui est contradictoire.

3) VRAI Ceux qui ont écouté en TDs écriront $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ les autres fourniront peut-être un autre exemple.

Problème

1) a) Soit $t \geq 1$. Alors $t \leq t^2$ donc $-t^2 \leq -t$ donc $e^{-t^2} \leq e^{-t}$. La positivité des exponentielles est claire.

b) Soit $A \geq 1$. L'intégrale $\int_1^A e^{-t}dt = e^{-1} - e^{-A}$ admet une limite, (qui est e^{-1}) quand A tend vers $+\infty$. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$, restreinte à $[1, +\infty[$, est prise en sandwiche entre la fonction nulle et la fonction $t \mapsto e^{-t}$, dont l'intégrale converge en $+\infty$. En conséquence, son intégrale converge aussi.

c) La convergence en $+\infty$ a été prouvée ; pour ce qui est de l'autre borne, le changement de variable $s = -t$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_{-A}^0 e^{-t^2}dt$ montre que l'intégrale est aussi convergente en $-\infty$ et le passage à la limite montre -ce qui est graphiquement évident !- que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{-t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$. En sommant les deux, on obtient l'identité à montrer.

2) Soit a et b deux réels positifs. Par le théorème des accroissements finis appliqués à la fonction dérivable $t \mapsto -t$ il existe un réel c lui-même strictement positif (il appartient au segment $[a, b]$) pour lequel :

$$|e^{-a} - e^{-b}| = e^{-c}|a - b|.$$

Il n'y a plus qu'à majorer e^{-c} par $e^0 = 1$.

3) Soit $y \in [0, 1[$. La fonction g suggérée par l'énoncé est deux fois dérivable sur $[0, y]$ (et on calcule sans difficulté sa dérivée $g'(s) = -\dfrac{1}{1-s}$ et sa dérivée seconde $g''(s) = -\dfrac{1}{(1-s)^2}$) : on peut donc lui appliquer la formule de Taylor-Lagrange sur cet intervalle, assurant ainsi l'existence d'un réel $c \in [0, y]$ pour lequel : $g(y) = g(0) + g'(0)y + g''(c)\dfrac{y^2}{2}$ soit ici explicitement :

$$\ln(1 - y) = -y - \frac{y^2}{2(1-c)^2}.$$

Pour exploiter cette égalité, on déduit de $c \leq y < 1$ que $0 < 1 - y \leq 1 - c$ puis que $0 < (1 - y)^2 \leq (1 - c)^2$ puis que $0 \leq (1 - c)^{-2} \leq (1 - y)^{-2}$ puis que $-(1 - y)^{-2} \leq -(1 - c)^{-2} \leq 0$ et enfin que :

$$-\frac{y^2}{2(1-y)^2} \leq \frac{y^2}{2(1-c)^2} \leq 0.$$

Il n'y a plus qu'à combiner cet encadrement et l'égalité fournie plus haut par Taylor-Lagrange.

4) Puisque $0 \leq t \leq \sqrt{N}$, $t^2/N \leq 1$, donc $0 \leq 1 - \dfrac{t^2}{N}$. En passant à la puissance N on obtient l'inégalité de gauche.

Pour celle de droite, on se débarrasse d'abord du cas trivial où $t = \sqrt{N}$ pour lequel elle est évidente, et on suppose donc désormais que $0 \leq t < \sqrt{N}$. On applique l'inégalité de droite du 3) au réel $y = t^2/N$ qui est bien dans $[0, 1[$ et on obtient ainsi :

$$\ln\left(1 - \frac{t^2}{N}\right) \leq -\frac{t^2}{N}.$$

Il ne reste plus qu'à multiplier cette inégalité par N puis lui appliquer la fonction exponentielle, qui est croissante.

5) C'est juste Chasles en étant méticuleux.

6) a) Soit $n \geq 1$. Il est d'abord prudent de remarquer que le changement de variable a un sens : dans l'intervalle d'intégration qui définit a_n, la quantité t/n^3 varie entre 0 et 1 donc dans le domaine de définition de l'arc sinus.

On effectue le changement suggéré : $\theta = \text{Arcsin}\left(\dfrac{t}{n^2}\right)$ fournit $t = n^3 \sin\theta$ puis $dt = n^3 \cos\theta$. On rentre ces informations dans l'intégrale à calculer :

$$a_n = \int_0^{n^3} \left(1 - \frac{t^2}{n^6}\right)^{n^6} dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{n^6 \sin^2\theta}{n^6}\right)^{n^6} n^3 \cos\theta \, d\theta = n^3 \int_0^1 \left(\cos^2\theta\right)^{n^6} \cos\theta d\theta = n^3 J_{2n^6+1}.$$

b) On récupère l'équivalent de l'intégrale de Wallis rappelé dans l'introduction du problème : quand $n \to +\infty$:

$$a_n \sim n^3 \sqrt{\frac{\pi}{2(2n^6+1)}} \sim \frac{n^3}{\sqrt{n^6}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On en déduit que la suite (a_n) est convergente, et que sa limite est $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

7) a) Tout le monde trouve bien sûr $e_n = e^{-n}$.

b) Soit $n \geq 1$. L'inégalité $b_n \leq e_n$ découle aussitôt de l'inégalité du 1) a). Pour l'inégalité $-c_n \leq b_n$ il faut appliquer le 4) avec $N = n^6$ puis intégrer l'inégalité obtenue en faisant varier t entre n et n^3 et enfin majorer le majorant obtenu par b_n, cette dernière majoration étant due à la positivité de $t \mapsto e^{-t^2}$ sur $[n^3, +\infty[$.

c) Par le théorème des gendarmes, les suites (b_n) et (c_n) tendent toutes deux vers 0.

8) a) Puisque $0 \leq t \leq n$, $0 \leq y \leq \dfrac{1}{n^4}$. Puisque $2 \leq n$, $y \leq \dfrac{1}{16}$, donc $0 < \dfrac{15}{16} \leq 1 - y$ donc $0 < \dfrac{1}{1-y} \leq \dfrac{16}{15}$.

b) On multiplie entre elles les inégalités entre nombres positifs $0 \leq y \leq \dfrac{1}{n^4}$ et $0 < \dfrac{1}{1-y} \leq \dfrac{16}{15}$. On met le tout au carré. On divise par deux. On remarque que $\dfrac{(16)^2}{2 \times (15)^2} \leq 1$. On a fini.

c) On a déjà vérifié lors du a) que $0 \leq y < 1$. On peut donc appliquer l'encadrement du 3). En recyclant le b) pour le reporter dans la minoration, on obtient ce qui est demandé.

d) Particulièrement facile : on remplace y par sa définition et on multiplie par n^6.

e) Tiens on ne s'est toujours pas servi du 2) ? Il est temps d'y songer !

On pose $a = t^2$, $b = -n^6 \ln\left(1 - \dfrac{t^2}{n^6}\right)$, et on majore ensuite $|a - b|$ en utilisant le d).

9) Soit $n \geq 2$. On majore $|d_n|$ en utilisant l'inégalité triangulaire pour les intégrales c'est-à-dire en majorant par l'intégrale de la valeur absolue. En utilisant le 8) e) on majore ensuite la valeur absolue intégrée par $1/n^2$. On applique ensuite l'inégalité de la moyenne : une intégrale est majorée par la longueur de l'intervalle d'intégration multipliée par un majorant de la fonction intégrée, ici c'est par $n \times (1/n^2) = 1/n$. Ce majorant tend vers 0 : par le théorème des gendarmes $|d_n|$ en fait autant. On conclut que (d_n) est convergente et tend vers 0.

10) On fait tendre n vers l'infini dans l'identité du 5). On obtient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 0 + 0 + 0.$$

En se référant à la question 1 c) on conclut : $I = \sqrt{\pi}$.