1) La question, avec son "en déduire", ne me convainc pas.
Je montre plutôt par récurrence sur $n$ l'énoncé :

$(H_n)$ « $a_n$ et $b_n$ sont bien définis, et sont strictement positifs ».

Une fois qu'on a compris ça, l'exécution est très facile.

2) Déjà rencontré dans le problème 1, tiens !
Soit $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors
$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2}{2}$$
$$= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} \geqslant 0$$
De plus ce réel est nul si et seulement si $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$, ce qui équivaut à $x = y$ (on est sur $\mathbb{R}^{+*}$).

3) On montre par récurrence sur $n$ l'énoncé :

$(H_n)$ « $a_n < b_n$ »

* $(H_0)$ découle des hypothèses : $a_0 = a < b = b_0$
* Soit $n \geqslant 0$ fixé, supposons $(H_n)$. Alors au vu de 1) et $(H_n)$, $0 < a_n$, $0 < b_n$ et $a_n \neq b_n$

Au vu de 2) on obtient : $\sqrt{a_n b_n} < \frac{a_n + b_n}{2}$ c'est-à-dire $a_{n+1} < b_{n+1}$

4) Soit $n \geqslant 0$. Alors $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{a_n b_n}}{a_n} = \sqrt{\frac{b_n}{a_n}} > \sqrt{1} = 1$, donc $a_n < a_{n+1}$

tandis que $b_n - b_{n+1} = b_n - \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) = \frac{b_n - a_n}{2} > 0$, donc $b_{n+1} < b_n$.

5) (a) Soit $n \geqslant 0$. Alors $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \frac{(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})^2}{2}$

(par le calcul du 2) appliqué à $x = \sqrt{b_n}, y = \sqrt{a_n}$)

tandis que
$$\frac{(b_n - a_n)^2}{2(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2} = \frac{((\sqrt{b_n})^2 - (\sqrt{a_n})^2)^2}{2(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2} = \frac{(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n})^2 (\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})^2}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n})^2}$$
$$= \frac{(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})^2}{2}$$

(b) Soit $n \geqslant 0$. Remarquons d'abord que comme $a_n < b_n$ et $a_{n+1} < b_{n+1}$ on peut se dispenser d'écrire les valeurs absolues.

On a alors
$$0 \leqslant |b_{n+1} - a_{n+1}| = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{(b_n - a_n)}{2} \times \frac{(b_n - a_n)}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2}$$
$$= \frac{(b_n - a_n)}{2} \times \frac{b_n - a_n}{b_n + \sqrt{a_n}\sqrt{b_n} + a_n} \leqslant \frac{b_n - a_n}{2} \times \frac{b_n}{b_n + \sqrt{a_n}\sqrt{b_n} + a_n}$$
$$\leqslant \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{|b_n - a_n|}{2}.$$

(c) Notons $(H_n)$ l'inégalité proposée

* $(H_0)$ est tautologique
* Soit $n \geq 0$ fixé. Supposons $(H_n)$

On obtient alors, au vu du b) :

$$|b_{n+1} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|b_n - a_n| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}|b_0 - a_0| = \frac{1}{2^{n+1}}|b_0 - a_0|$$

On dispose alors de la mise en gendarmes :

$$0 \leq b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$$ où les deux gendarmes tendent vers 0

on conclut que $b_n - a_n \to 0$

6) Par le critère des suites ~~alternées~~ adjacentes, $m(a,b)$ existe et est limite commune de $(a_n)$ et $(b_n)$

7) Soit $n \geq 0$. Comme $(a_k)$ est strictement croissante et $(b_k)$ à valeurs positives,

$0 < \sqrt{a_0} \leq \sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}$ donc $\dfrac{1}{2(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2} \leq \dfrac{1}{2(\sqrt{a_0})^2} = \dfrac{1}{2a_0} = \dfrac{1}{2a}$

Au vu du 5(b) on a alors : $0 < b_{n+1} - a_{n+1} \leq \dfrac{(b_n - a_n)^2}{2a}$

Le réel $k = \dfrac{1}{2a}$ répond à la question

8) En divisant l'inégalité du 7 par le réel strictement positif $b_n - a_n$ on obtient, pour tout $n \geq 0$ :

$$0 < \frac{b_{n+1} - a_{n+1}}{b_n - a_n} \leq k\,(b_n - a_n)$$

Le gendarme de gauche est 0, celui de droite tend vers $k\,[m(a,b) - m(a,b)] = 0$

Le prisonnier tend donc aussi vers 0.

9) La question la plus ingénieuse (me semble-t-il), quoique très simple quand on a vu le truc.

Soit $n \geq 0$. Alors pour tout $m \geq 2$, $b_{n+m} \leq b_{n+2} < b_{n+1}$

On fait tendre $m$ vers $+\infty$ dans cette inégalité, on obtient :

$$m(a,b) \leq b_{n+2} < b_{n+1}$$

donc $\quad m(a,b) < b_{n+1}$

autrement dit $m(a,b) < \frac{a_n+b_n}{2}$

soit $2m(a,b) < a_n + b_n$

soit $m(a,b) - a_n < b_n - m(a,b)$.

10) On peut préférer regrouper ce qui on vient de trouver en :

$$b_n - a_n < 2b_n - 2m(a,b)$$

donc $b_n - a_n \leqslant 2\,[b_n - m(a,b)]$

Reprenons l'inégalité du 7, en remarquant que $a_{n+1} \leqslant m(a,b) \leqslant b_{n+1}$, donc :

$$0 \leqslant b_{n+1} - m(a,b) \leqslant b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant k\,(b_n - a_n)^2$$
$$\leqslant 4k\,[b_n - m(a,b)]^2$$

Le réel $C = 4k$ convient donc.

11) On applique la définition de "$(b_n)$ tend vers $m(a,b)$" à $\varepsilon = \frac{1}{20C}$

Il existe donc $n_0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$

$$0 < b_n - m(a,b) \leqslant \frac{1}{20C} < \frac{1}{10C}$$

En particulier $0 < b_{n_0} - m(a,b) < \frac{1}{10C}$

12) Récurrence pas rigolote mais facile sur $n \geqslant n_0$

* pour $n = n_0$ ça se réduit à rien
* l'hérédité découle du seul 10).

13) Le nombre de décimales stabilisées augmente très vite avec $n$, un peu comme une puissance de 2. Ce n'est pas surprenant : en regroupant 11) et 12) on obtient :

$$0 < b_n - m(a,b) \leqslant \frac{1}{C}\,\frac{1}{10^{2^{n-n_0}}}$$

donc on peut s'attendre à un nombre de décimales exacte de l'ordre de $2^{n-n_0}$ pour un certain $n_0$. Ça correspond raisonnablement.