Solution de l'exercice 1:

C'est une simple application de la définition de « dérivée directionnelle ». On doit connaître celle-ci...

La voilà pour qui l'aurait oubliée, en verbatim du cours :

On dit que f est dérivable selon le vecteur v en a (ou qu'elle admet une dérivée directionnelle selon le vecteur v en a) lorsque la fonction d'une variable réelle $\varphi: t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0. Donc tout le travail ici est d'expliciter $\varphi(t)$.

Ce n'est pas un travail bien difficile! Ici, explicitement :

$$\varphi(t) = f(a+tv) = f(2+t, 1-2t) = (2+t)(2t-1)^2$$

c'est un polynôme en t, donc une fonction dérivable partout, donc une fonction dérivable sur \mathbb{R} . Il ne reste plus qu'à calculer sa dérivée en 0.

Le plus simple ici me sembler consiste à dériver φ en tout point de \mathbb{R} , ce qui donne :

$$\varphi'(t) = (2t-1)^2 + 4(2+t)(2t-1)$$

puis d'évaluer ce truc en 0, obtenant : $1 + 4 \times 2 \times (-1) = -7$. C'est tout!

Solution de l'exercice 2:

On a besoin de justifier de l'existence des dérivées partielles de G, éventuellement jusqu'à l'ordre 2. Pour cela, il suffit d'affirmer avec suffisamment d'aplomb que G est de classe \mathcal{C}^{∞} . J'aime bien personnellement la justification « C'est évident », mais je sais que certains collègues tiquent. Je prends donc mon souffle pour dire d'une traite que G est de classe \mathcal{C}^{∞} parce que fabriquée par multiplication des fonctions constantes (1,0,0), (0,1,0) et (0,0,1) par des fonctions à valeurs réelles qui sont elles-mêmes obtenues à partir des fonctions coordonnées par multiplication et composition par la fonction sinus. Or il est notoire que tant sinus que les constantes et les applications coordonnées (celles-ci parce que linéaires) sont des applications de classe \mathcal{C}^{∞} , et que la composition ou la multiplication préservent cette classe. Ouf!

Pour le calcul... il n'y a aucune astuce, on doit connaître les définitions des trois opérateurs qui figurent dans l'exercice, puis méthodiquement les appliquer aux formules qui définissent G. Je reproduis ici ces trois définitions, en notant G_1 , G_2 et G_3 les trois composantes de G:

$$\operatorname{div}(G) = \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} \qquad \operatorname{rot}(G) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad \operatorname{grad}(H) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{\partial H}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Pour les deux premières questions, on a besoin des neuf dérivées partielles premières qu'on peut calculer à partir de G. Comme premier entraînement à la notion de « matrice jacobienne », astreignons-nous non seulement à les calculer mais même à les ranger dans un beau tableau (3,3) qu'on appelle la matrice jacobienne de G au point (x,y,z).

La difficulté est bien sûr de ne pas par étourderie écrire la transposée du résultat attendu. Pour ne pas être victime de cette chausse-trape, on peut se souvenir que les **colonnes** de la matrice à écrire peuvent être étiquetées par les coordonnées de l'espace de **départ**. (Analogie avec la façon dont les colonnes de la matrice d'une application linéaire u dans des bases correspondent aux $u(e_i)$ et ainsi aux coordonnées du départ). Bon on n'a plus qu'à agir et écrire...

$$JG(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x} & \frac{\partial G_1}{\partial y} & \frac{\partial G_1}{\partial z} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} & \frac{\partial G_2}{\partial y} & \frac{\partial G_2}{\partial z} \\ \frac{\partial G_3}{\partial x} & \frac{\partial G_3}{\partial y} & \frac{\partial G_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin y & x \cos y & 0 \\ y \cos x & \sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puis, les divergence et rotationnel de G sont...

$$\operatorname{div}(G) = \sin x + \sin y + 1$$

(on rappelle au passage que c'est la trace de la jacobienne)

$$rot(G) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y\cos x - x\cos y \end{pmatrix}$$

Enfin, munis de l'expression de la divergence de G, on calcule sans mal le gradient de cette fonction, qui est...

$$\operatorname{grad}[\operatorname{div}(G)] = \begin{pmatrix} \cos x \\ \cos y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 3:

La justification qu'elles sont de classe C^1 , c'est la même chanson qu'à l'exercice précédent en ajoutant les mots « addition », « exponentielle » et « cosinus ».

Les matrices sont aussi faciles qu'à l'exercice précédent. Je ne peux ici que taper les réponses :

$$Jf(x,y) = (e^{xy}(xy + y^2 + 1) e^{xy}(xy + x^2 + 1))$$

$$JG(x, y, z) = (y + z \quad z + x \quad x + y)$$

$$Jh(x,y) = \begin{pmatrix} y\cos x & \sin x \\ -\sin x & 0 \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 4:

Soit v = (a, b) un vecteur non nul de \mathbb{R}^2 . On va vérifier que f admet une dérivée dans la direction (a, b) au point (0, 0) -et, au passage, calculer cette dérivée directionnelle. Comment faire? Bien sûr en revenant encore une fois à la définition des dérivées directionnelles, sans se laisser piéger par la définition un peu compliquée de f comme recollement de deux formules.

Pour t réel, on doit calculer la fonction auxiliaire $\varphi(t) = f[(0,0) + t(a,b)] = f(ta,tb)$. Exécutons.

On voit que, du fait de la définition de f comme recollement, l'exécution nécessite de distinguer les cas où t = 0 et où $t \neq 0$.

Débarrassons nous du cas idiot où t = 0: $\varphi(0) = f(0,0) = 0$.

Maintenant quand $t \neq 0$,

$$\varphi(t) = f(ta, tb) = \frac{t^3 a b^2}{t^2 (a^2 + b^2)} = t \frac{a b^2}{a^2 + b^2}.$$

Que faire alors?

Ce n'est pas très original, mais un peu caché : on peut s'apercevoir que la formule qu'on vient de montrer pour $t \neq 0$ est également vraie dans le cas particulier où t = 0. On peut donc écrire pour tout t réel, nul ou non que :

$$\varphi(t) = t \frac{ab^2}{a^2 + b^2}.$$

Cette fonction est dérivable partout (de dérivée constante) et en particulier en 0. La dérivée directionnelle existe donc et, plus précisément, elle vaut $\frac{ab^2}{a^2+b^2}$.

La question 2 a une solution courte, mais elle repose sur un recoin du cours. Connaissez-vous assez bien votre cours pour y avoir repéré l'endroit -assez isolé- où on évoque les dérivées directionnelles pour en dire un peu plus que leur seule définition?

Persifleur moi? Mais non, je n'en doute pas que vous connaissez parfaitement votre cours. Et que vous avez tous immédiatement compris que je faisais allusion à l'énoncé suivant : si f est de classe C^1 , en tout point (x_0, y_0) et le long de tout vecteur (a, b), la dérivée directionnelle de f est donnée par la formule :

$$a\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Nous n'avons pas d'autre outil à disposition et nous devons montrer que f n'est **pas** de classe C^1 . Voilà qui suggère une stratégie. Laquelle?

Oui, bien sûr, la preuve par l'absurde. On suppose f de classe \mathcal{C}^1 et on va arriver à un truc che-lou. L'hypothèse nous donne la formule qui précède en tout (x_0, y_0) mais on se rend bien compte que ça n'a d'intérêt qu'en (0,0). Il ne reste plus qu'à jouer avec quelques (a,b) particuliers pour tomber sur un énoncé délirant. Jouons donc.

On peut utiliser (a,b)=(1,0). On obtient $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$. On peut recommencer avec (a,b)=(0,1). On obtient $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. On peut enfin essayer (1,1) (ou plutôt tiens (2,2) ça m'évitera d'écrire des fractions), et on obtient $2\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+2\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\frac{2\times 2^2}{2^2+2^2}=1$.

En réinjectant dans cette dernière identité les valeurs des dérivées partielles trouvées juste au-dessus, on conclut que $2 \times 0 + 2 \times 0 = 1$. Ce n'est pas raisonnable, et f n'est donc pas de classe \mathcal{C}^1 .

Solution de l'exercice 5 :

D'abord le cas des points de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, qui est un **ouvert** de \mathbb{R}^2 . Notez l'importance que j'accorde à l'utilisation du mot **ouvert** sur une copie qui traiterait de la question : c'est parce que la formule qui fournit f est valable non seulement en un point (x_0, y_0) mais aussi dans toute une boule ouverte centrée en ce point qu'on peut être assuré de la dérivabilité de f en ce point. Après on écrit un magma un peu plus long que « C'est évident », avec des mots-clés comme composition ou division dedans, le point important étant qu'on y souligne que la racine carrée, fonction dérivable sur l'ouvert $]0, +\infty[$ de \mathbb{R} , n'est appliquée qu'à des points de cet intervalle quand (x, y) varie dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Puis on passe au calcul de $\frac{\partial f}{\partial x}$...

Le principe en est simple, l'exécution un peu lourde puisqu'il faut courageusement dériver une fonction composée pas de toute légèreté.

On va faire prudemment un premier calcul intermédiaire, la dérivation partielle du seul $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Comment s'y prendre de façon optimale?

En évitant comme la peste les formules du type dérivation de u/v; en évitant même d'y voir la composition de la racine et de l'inversion mais en commençant par réécrire cette fonction sous la forme $(x^2 + y^2)^{-1/2}$. Une fois que c'est fait, on peut foncer :

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Il faut maintenant terminer le calcul, j'ai l'impression qu'on peut oser régler la question du produit préalable par un x et de la composition par sinus d'un seul coup, rien n'est bien méchant.

Et je crois trouver, en conclusion, la fort laide formule suivante, valable seulement pour (x, y) dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - y \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

Vu la symétrie de la formule qui définit f, on obtient de même la dérivée partielle par rapport à y en échangeant les x et les y, un peu de copier-coller et la voilà :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - x \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

Il reste maintenant à rechercher les dérivées partielles au point (0,0). Comment faire?

Bien sûr en pensant à la restriction de f à l'axe horizontal Ox et à l'axe vertical Oy, ou, ce qui revient au même dit autrement, en calculant les dérivées directionnelles en (0,0) selon les vecteurs (1,0) et (0,1). Essayez.

Je rédige ça en termes de dérivées directionnelles : pour la première dérivée partielle on introduit $\varphi(t) = f[(0,0)+t(1,0)] = f(t,0)$. Comme à l'exercice précédent, cette quantité se calcule de deux façons différentes selon que $t \neq 0$, dans lequel cas on trouve 0 (à cause du x en facteur au début de la formule qui définit f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$), ou que t=0, dans lequel cas on trouve aussi 0 puisque f(0,0)=0. La fonction φ est donc nulle, donc dérivable en 0 avec une dérivée nulle. Par symétrie en x et y des formules, ça marche bien sûr pareil pour la deuxième dérivée partielle et on peut conclure que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

2) Y a-t-il une astuce? Je n'en vois pas. On va revenir à la définition d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 : c'est une fonction dont les dérivées partielles (premières) existent et sont continues. Pour montrer que f n'est pas de classe \mathcal{C}^1 , il nous suffit donc de montrer que l'une des dérivées monstrueuses écrites plus haut est discontinue quelque part, évidemment en (0,0). Vu leur symétrie, il n'y en a pas une meilleure que l'autre; on va donc se concentrer sur $\frac{\partial f}{\partial x}$. Savez-vous montrer que cette fonction est discontinue en (0,0)?

Vous vous en souvenez les démonstrations de discontinuité en un point comme je les pratique en TD consistent à faire converger des animaux vers ce point selon des trajectoires plus ou moins compliquées. Un éléphant marchant sur l'axe horizontal ne donne rien; en effet $\frac{\partial f}{\partial x}(t,0)=0$ et aucune discontinuité n'apparaît. Ce n'est pas surprenant puisque la fonction f est nulle sur l'axe horizontal, on devait bien s'attendre à ce que $\frac{\partial f}{\partial x}$ le soit aussi. On peut essayer de faire marcher des éléphants le long de l'axe vertical, ça va échouer de façon un peu plus compliquée : on calcule en effet

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) = t \sin\left(\frac{1}{|t|}\right)$$

puis on appelle les gendarmes -|t| et |t| pour qu'ils enserrent cette expression. Elle tend vers zéro et on n'a rien prouvé. Qu'essayer d'autre?

Un éléphant tendant vers (0,0) sur une oblique? Ça ne va pas encore marcher directement mais nous sommes sur une bonne voie. Écrivons donc, pour t > 0 (le choix d'aller dans un seul sens évitera de subir des valeurs absolues) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,t) = t \sin \left(\frac{1}{t\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos \left(\frac{1}{t\sqrt{2}}\right)$$

C'est plus simple mais encore un peu trop compliqué. Il faut avoir un bon sens de la contribution de chaque terme pour arriver à conclure, et prendre une bonne initiative. Réfléchissez.

Si on regarde la formule, on y voit une première partie qui tend vers zéro (les gendarmes!) et une deuxième partie qui oscille et ne tend donc PAS vers zéro. Reste à formaliser cette idée. Oui, vous vous en souvenez, ça peut se faire en posant un ver luisant sur la tête de l'éléphant, ver luisant qui clignotera juste aux bons moments, c'est-à-dire quand le $\frac{1}{t\sqrt{2}}$ est un multiple entier de 2π et où son cosinus vaut 1. Plus précisément,

notons donc $t_n = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi n}$. Avec ce choix, on constate que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t_n, t_n) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi n}\sin(2\pi n) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos(2\pi n) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

On est au bout! Quand $n \to \infty$, $(t_n, t_n) \to (0, 0)$ mais pour tant $\frac{\partial f}{\partial x}(t_n, t_n) \not\to \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$. Ceci prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue.

Solution de l'exercice 6:

1) Ici on ne va pas se compliquer la vie : f, polynomiale (autant qu'on sache ce que ça veut dire à plusieurs variables...) est « évidemment » de classe \mathcal{C}^{∞} . Et après?

Deux façons de faire, toutes deux instructives. L'une est d'essayer de faire à la main le développement limité demandé -il est tellement simple que ça me semble la meilleure méthode-, l'autre consiste à répéter une formule du cours aussi efficacement que le ferait l'astucieux perroquet. Allons donc pour la première méthode.

Pour $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, qui tendra vers (0,0) en fin de calcul, on explicite f[(-4,3) + (h,k)] puis on met à la poubelle dans un petit o les termes d'ordre strictement plus grand que 1. Essayez.

Quand $(h,k) \rightarrow (0,0)$,

$$f[(-4,3) + (h,k)] = f(-4+h,3+k3 + \frac{(-4+h)^2}{16} + \frac{(3+k)^2}{9} = 3 + \frac{16-8h+h^2}{16} + \frac{9+6h+k^2}{9}$$
$$= 3+1-\frac{h}{2}+1+\frac{2k}{3}+o(\|(h,k)\|) = 5-\frac{h}{2}+\frac{2k}{3}+o(\|(h,k)\|)$$

Et maintenant, recommençons en appliquant comme des brutes une formule du cours, valable pour les fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

On calcule stupidement en tout point de \mathbb{R}^2 les deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{8}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{9}$ puis les trois valeurs f(-4,3) = 3+1+1=5, $\frac{\partial f}{\partial x}(-4,3) = -\frac{1}{2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(-4,3) = \frac{2}{3}$.

Puis on récite avec ardeur la formule du développement limité valable pour une fonction de classe \mathcal{C}^1 :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|(h, k)\|)$$

ce qui s'explicite ici en :

$$f(-4+h,3+k) = 5 - \frac{h}{2} + \frac{2k}{3} + o(\|(h,k)\|).$$

2) La question est très fruste : il s'agit de considérer le petit o comme ridiculement petit sans chercher à en fournir une justification théorique. Il n'y a plus qu'à identifier les valeurs pertinentes pour h et k.

Ici h = -0.01 et k = 0.01, la valeur approchée étant alors 5 + 0.005 + 0.007 soit 5.012.

Solution de l'exercice 8:

1) C'est un simple calcul sans astuce.

La fonction h va de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R} ; elle est définie par :

$$(f \circ g)(x, y, z) = f[g(x, y, z)] = (x + z + y)^{2} - (x + z - y)^{2} = 4(x + z)y.$$

2) Les fonctions sont de classe C^1 parce que polynomiales. Les matrices jacobiennes sont elles aussi sans astuce, simple application des définitions sans confondre lignes et colonnes.

$$J_f(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & -2v \end{pmatrix}$$

(Notez les lettres que j'ai choisies : il n'est pas très agréable que x ou y soient simultanément utilisées pour noter des coordonnées dans l'espace de départ de g et celui d'arrivée de g, qui est aussi celui du départ de f. Tant que faire se peut, il est bon que le choix typographique aide à savoir où on se trouve.

$$J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Et enfin

$$J_h(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4y & 4x + 4z & 4y \end{pmatrix}$$

3) La vérification est toute bête : il s'agit de contrôler le produit matriciel ci-dessous est juste, et il l'est.

$$\begin{pmatrix} 4y & 4x + 4z & 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(y+x+z) & 2(y-x-z) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4) g est linéaire, elle est donc son propre développement limité à l'ordre 1 (on peut écrire $g(x,y,z) = g(x,y,z) + o(\|(x,y,z)\|)$ où le o est nul si on est joueur). f et h sont quadratiques, donc chacune a un développement limité limité à partie principale nulle, autrement dit :

$$f(x,y) = o(\|(x,y)\|)$$
 et $h(x,y,z) = o(\|(x,y,z)\|)$

Solution de l'exercice 9:

La fonction s $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$, ayant pour départ le même ensemble que g est à valeurs dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ -d'une part parce qu'on a exclu 0 de l'intervalle où varie r, d'autre part parce que θ varie dans une réunion de

quatre intervalles dans lesquels ni le sinus ni le cosinus ne s'annule. De plus, cette fonction s est à l'évidence de classe \mathcal{C}^1 . La fonction g est alors elle-même de classe \mathcal{C}^1 parce que $g = f \circ s$.

Pour calculer les dérivées partielles de g on ut lise les règles de dérivation de fonctions composées. On peut les retrouver sous forme de matrices jacobiennes, c'est une compétence utile de savoir manipuler leur forme « règle de la chaîne ».

Cela consiste à écrire comme des vérités bien connues, avec un flou artistique sur les lieux où les fonctions sont évaluées, les deux formules :

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

puis de remplacer chaque terme dans ces formules, avec bon sens, par l'expression qu'il désigne. Cela donne :

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = -r \sin \theta \, \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \, \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta \, \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \, \frac{\partial f}{\partial y}$$

Si on est pointilleux, on peut juger utile de préciser en quels points ces fonctions sont calculées mais ce n'est pas vraiment requis : l'impératif de garder les formules lisibles invite à y accepter quelques sous-entendus qui les rendent fausses prises totalement à la lettre.

En cas de refus des sous-entendus, on pourra écrire (pour tout couple (r, θ) dans le domaine de définition de g) - mais je le déconseille, on perd trop en lisibilité :

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta \,\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta \,\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta \, \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta) + \sin\theta \, \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

Et oups, dans la première version de ce corrigé j'oubliais d'utiliser les deux informations que donne l'énoncé sur les valeurs de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. Reportons les dans les équations ci-dessus, on n'a pas encore fini :

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = \frac{-r\sin\theta}{r\cos\theta} + \frac{r\cos\theta}{r\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta} - \tan\theta$$

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\cos \theta}{r \cos \theta} + \frac{\sin \theta}{r \sin \theta} = \frac{2}{r}$$

Solution de l'exercice 10:

La fonction f est clairement de classe \mathcal{C}^{∞} , et γ est supposée être de classe \mathcal{C}^1 . Leur composée est donc de classe \mathcal{C}^1 .

Sur cet exemple spécifique, l'utilisation des formules de composition est inutilement lourd, puisqu'il s'agit au fond essentiellement de fonctions d'une variable. Il faut mieux expliciter, pour $t \in I$ que :

$$\left(f\circ\gamma\right)\left(t\right)=e^{x\left(t\right)y\left(t\right)}$$

puis dériver en oubliant tout ce qu'on a appris récemment cette fort simple fonction de t dont la dérivée va être, en tout t de I:

$$(f \circ \gamma)'(t) = [x'(t)y(t) + x(t)y'(t)]e^{x(t)y(t)}$$

On n'a plus qu'à appliquer cette formule à t = 0:

$$(f \circ \gamma)'(0) = [3 \times 2 + 1 \times 4]e^{1 \times 2} = 10e^2.$$

Solution de l'exercice 11:

La fonction q définie sur $\mathbb{R}^* \times R$ par q(x,y) = y/x est « clairement » de classe \mathcal{C}^{∞} . Comme φ est supposée de classe \mathcal{C}^1 , la composée $\varphi \circ q$ est donc elle aussi de classe \mathcal{C}^1 . Elle a donc ses deux dérivées partielles en tous les points.

Il y a deux solutions à cet exercice. La première, pas palpitante, consiste à expliciter les dérivées partielles de f en fonction de celles de φ et de celles de q (qui se laissent expliciter, puisque q est explicite), puis de calculer. Et ça marche. En verrez-vous une plus rigolote?

Indication : il faut penser aux dérivées directionnelles.

La fonction f étant de classe \mathcal{C}^1 , l'expression à calculer est la dérivée directionnelle de f au point (x,y) et dans la direction (x,y). Cette dérivée directionnelle a par ailleurs une définition : c'est la dérivée en 0 de la fonction $t\mapsto f[(x,y)+t(x,y)]=f[(1+t)x,(1+t)y]=\varphi[(1+t)y/(1+t)x]=\varphi(y/x)$. C'est donc la dérivée d'une fonction constante : ça fait 0.

Solution de l'exercice 12:

1) Blabla, polynomiales, division, blabla. La fonction proposée est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On aura besoin pour la suite de calculer explicitement les dérivées partielles en tout point $(x,y) \neq (0,0)$. Après le calcul suivant :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) - 2x(x^3y - xy^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{3x^4y + 3x^2y^3 - x^2y^3 - y^5 - 2x^4y + 2x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

on obtient:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$$

En échangeant les rôles de x et y on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

Il faut ensuite passer aux dérivées partielles premières en (0,0). C'est beaucoup moins lourd : comme d'habitude, en contexte de recollement de formules, il est efficace de les penser comme dérivées directionnelles. Pour la dérivée partielle par rapport à x, on se concentre sur la restriction de f à l'axe horizontal - restriction qui se révèle nulle (par la formule compliquée ailleurs qu'en (0,0), par la formule f(0,0)=0 en ce point). La fonction nulle est dérivable partout, de dérivée nulle, et en particulier en 0. On a donc calculé $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.

Le même argument sur l'axe vertical donne $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=0.$

On sait désormais que les dérivées partielles premières existent partout. La dernière étape est de vérifier leur continuité. Celle-ci est claire sur l'OUVERT $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, il faut la justifier en (0,0). Je n'écris pas les détails, qui sont similaires à plein d'exercices déjà traités : une méthode confortable est d'utiliser des coordonnées polaires. Le dénominateur de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ n'est autre que r^4 tandis que dans le numérateur on peut mettre r^5 on facteur et as retrauver face à une supression trigonométrique qui est facilement O(1). Finelement

en facteur et se retrouver face à une expression trigonométrique qui est facilement O(1). Finalement $\frac{\partial f}{\partial x}$ est un O(r) quand (x,y) tend vers (0,0) et tend donc vers $0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. La situation est la même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$ et la fonction f est donc de classe \mathcal{C}^1 .

- 2) Blabla, polynomiales, division, blabla.
- 3) Les déricées partielles hors de (0,0) existent par la question précédente, on peut se servir de la formule qui explicite $\frac{f}{x}$ sur l'OUVERT $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pour en déduire une expression fort laide de $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en un $(x,y) \neq (0,0)$, expression qui sera :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{(x^4 + 12x^2 - 5y^4)(x^2 + y^2)^2 - 4y(x^2 + y^2)(x^4y + 4x^2y^3 - y^5)}{(x^2 + y^2)^4}$$

Surtout, avant de retoucher le numérateur, on simplifie par un $x^2 + y^2$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{(x^4 + 12x^2 - 5y^4)(x^2 + y^2) - 4y(x^4y + 4x^2y^3 - y^5)}{(x^2 + y^2)^3}$$

C'est parti pour un méga-développement pas particulièrement palpitant :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{x^6 + 12x^4y^2 - 5x^2y^4 + x^4y^2 + 12x^2y^4 - 5y^6 - 4x^4y^2 - 16x^2y^4 + 4y^6}{(x^2 + y^2)^3}$$

et finalement:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}$$

On se garde bien de calculer sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ l'autre dérivée croisée (encore qu'on l'obtienne comme pour les dérivées premières par un argument d'échange des rôles de x et y) : on dit que c'est la même chose, puisqu'il s'agit de dérivées partielles d'une fonction de classe \mathcal{C}^2 .

Notez que si, comme ça m'est arrivé au brouillon, on se trompe quelque part dans les calculs on s'en aperçoit : le numérateur doit avoir une jolie symétrie entre les x et les y. S'il ne l'a pas, on recommence autant de fois que nécessaire...

Il va maintenant falloir se pencher sur les dérivées partielles en (0,0). Regardons dans un premier temps $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$. Les deux s'interprètent comme dérivées directionnelles et pourront être calculées en considérant la restriction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ (pour la première) ou $\frac{\partial f}{\partial y}$ (pour la deuxième) sur l'axe horizontal.

Pour la première, on considère donc d'abord pour $t \neq 0$ le réel $\frac{\partial f}{\partial x}(t,0) = 0$ et pour la deuxième le réel $\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) = \frac{t^5}{t^4} = t$. On remarque ensuite que ces formules sont encore valables pour t = 0. Par la première, on en déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ existe et vaut 0; par la deuxième on en déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe et vaut 1. En travaillant de la même façon sur l'axe vertical, on obtiendrait de même l'existence et la valeur de $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$ et de $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$.

4) On constate qu'en (0,0) les deux dérivées partielles croisées existent mais sont différentes. Une fonction qui souffre d'une telle pathologie n'est pas de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 (ni même sur aucun ouvert contenant (0,0)).

Solution de l'exercice 13:

Tiens il y a une faute de frappe dans l'énoncé! La deuxième formule qui définit f est à considérer comme valable en tous les points de la forme (0, y) et non au seul point (0, 0). Sinon f n'a pas l'ensemble de définition annoncé.

- 1) La continuité est évidente sur l'OUVERT complémentaire de l'axe vertical. En un point (0,b) de l'axe vertical, quand (x,y) tend vers ce point avec $x \neq 0$ la formule proposée pour définir f montre que $f(x,y) = O(x^2) = O(1)$ donc qu'il tend bien vers f(0,b) = 0 quand (x,y) tend vers (0,b), avec $x \neq 0$; la deuxième formule proposée montre que f(0,y) = 0 tend aussi vers f(0,b) = 0 quand y tend vers b. Par recollement de ces deux informations la fonction f est donc continue au point (0,b).
- 2) Aux points (x, y) où x n'est pas nul, les dérivées partielles se calculent sans mal à partir de la première formule. On en aura besoin plus bas, donc on doit faire l'effort de les expliciter.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \sin\left(\frac{y}{x}\right) - y \cos\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

Plaçons nous maintenant en un point de la forme (0,b). La dérivée partielle par rapport à y est la plus facile à traiter; comme la restriction de f à l'axe vertical est nulle, il est évident que cette dérivée partielle existe et est nulle en tout point de cet axe vertical. Pour la dérivée partielle par rapport à x, on va encore revenir à la définition comme dérivée directionnelle dans la direction (1,0), cette fois-ci en écrivant tous les détails du calcul.

On va manipuler la fonction auxiliaire $\varphi(t) = f[(0,b) + t(1,0)] = f(t,b)$. Pour $t \neq 0$, on explicite $\varphi(t) = t^2 \sin\left(\frac{b}{t}\right)$ tandis que $\varphi(0) = f(0,b) = 0$. Contrairement à ce qui s'est passé dans la plupart des exercices précédents, on ne parvient pas à condenser ces deux formules en une seule, on poursuit donc méthodiquement en écrivant le taux de variation de la fonction φ près de 0, c'est (pour $t \neq 0$):

$$\tau(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = t \sin\left(\frac{b}{t}\right) = O(t)$$

Ce taux de variation tend donc vers 0 quand t tend vers 0 $(t \neq 0)$; ceci prouve que la dérivée partielle première par rapport à x existe et vaut 0. En résumé et pour référence :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0$$
 et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$

3) Il me semble bien que non. J'écris:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{n}, 2\pi\right) = \frac{2}{n}\sin\left(2n\pi\right) - 2\pi\cos\left(2n\pi\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) - 2\pi$$

Quand n tend vers l'infini, ceci tend vers -2π , qui n'est pas la valeur $\frac{\partial f}{\partial x}(0,2\pi)$.

4) La plus facile à calculer est la dérivée $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$: puisque la dérivée première par rapport à x est nulle partout sur l'axe vertical, elle admet une dérivée par rapport à y en tout point de cet axe vertical, cette dernière étant nulle. On a ainsi montré que $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x}(0,0) = 0$.

Pour l'autre dérivée croisée, on passe par la dérivée directionnelle. On introduit la fonction auxiliaire : $\psi(t) = \frac{\partial f}{\partial y}[(0,0)+t(1,0)] = \frac{\partial f}{\partial y}[(t,0)].$ Celle-ci se calcule tout d'abord pour $t \neq 0$ via les formules du 1) et on obtient $\psi(t) = t \cos\left(\frac{0}{t}\right) = t.$ On constate ensuite que cette formule est également valable en 0 puisque $\psi(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$ La fonction $\psi(t) = t$ est alors dérivable partout (et en particulier dérivable en 0) de dérivée égale à 1. On conclut que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1.$

5) Et hop, non à cause du 4 (ou non parce qu'on aurait pu au 3) faire échouer le caractère C^1 de f en tout point (0,b), avec $b \neq 0$).