Exercice 1

1) Pour $n \geq 2$

$$U_n = \left[n\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)\right]^{\alpha} - n^{\alpha}$$

$$= n^{\alpha}\left[\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{\alpha} - 1\right] \quad \text{où } \frac{(-1)^n}{n} \to 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

On effectue un DL à l'ordre 1 quand $n \to +\infty$

$$U_n = n^{\alpha}\left[1 + \alpha\frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right] = \alpha\frac{(-1)^n}{n^{1-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right) \quad (*)$$

$$= V_n + o\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)$$

Comme $\alpha \neq 0$, $\frac{1}{n^{1-\alpha}} = \frac{(-1)^n}{\alpha} V_n$ et donc $o\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right) = o(V_n)$: on peut écrire $U_n = V_n + o(V_n)$ donc $U_n \sim V_n$.

2) Quand $n \to +\infty$ $\frac{|V_n|}{|\alpha|} = \frac{1}{n^{1-\alpha}}$ est le terme général d'une série de Riemann où l'exposant $1-\alpha > 1$, donc $\sum |V_n|$ converge.

Comme $|U_n| \sim |V_n|$ les deux étant à termes positifs, $\sum |U_n|$ aussi

3) On distingue deux cas

* Si $\alpha = 1$ pour tout n, $U_n = (-1)^n$ donc $U_n \not\to 0$ quand $n \to +\infty$ donc $\sum U_n$ diverge

* Si $1 < \alpha$ $|V_n| = |\alpha| n^{\alpha-1} \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ donc aussi $|U_n| \to +\infty$ donc $U_n \not\to 0$ donc $\sum U_n$ diverge

4) On refait $(*)$ à l'ordre supérieur; on obtient:

$$U_n = V_n + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\frac{(-1)^{2n}}{n^{2-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right) = V_n + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \times \frac{1}{n^{2-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right)$$

$$\text{donc } W_n = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \times \frac{1}{n^{2-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right) \sim \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \times \frac{1}{n^{2-\alpha}} \quad (\text{car } \alpha \neq 0 \text{ et } \alpha \neq 1)$$

On reconnaît dans $\frac{1}{n^{2-\alpha}}$ le terme général d'une série de Riemann convergente ($2-\alpha$ varie dans $]1,2[$ quand α varie dans $]0,1[$), à termes positifs. Par le critère des équivalents, $\sum W_n$ converge

On se penche alors sur $\sum V_n$ et on constate que $|V_n| = \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$

donc * pour tout $n \geq 2$ $\quad V_n = (-1)^n\, |V_n|$

* $|V_n| \searrow$ puisque $n^{1-\alpha} \nearrow$ $\quad (1-\alpha > 0)$

* $V_n \to 0$ qd $n \to +\infty$ puisque $1-\alpha > 0$

Par le CSSA, $\sum V_n$ converge.

Puisque $\sum V_n$ et $\sum W_n$ convergent, $\sum U_n$ aussi.

Exercice 2

1) Pour $n \geq 1$ $\quad b_n = \ln\left[3n\left(1+\frac{1}{3n}\right)\right] - \ln(3n) = \ln\left(1+\frac{1}{3n}\right)$

Donc quand $n \to +\infty$ et puisque $\frac{1}{3n} \to 0$

$$b_n = \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{3n},$$ terme général d'une série de Riemann divergente et à termes positifs

Par le critère des équivalents, $\sum b_n$ diverge

2) Soit $n \geq 1$, soit $x \in [\ln(3n), \ln(3n+1)]$ ~~[illegible]~~. Alors

$$3n \leq e^x \leq 3n+1$$

puis $$n\pi \leq \frac{\pi}{3}e^x \leq n\pi + \frac{\pi}{3}$$

et donc $$0 \leq \frac{\pi}{3}e^x - n\pi \leq \frac{\pi}{3}$$

On regarde alors $|f(x)| = \left|\cos\left(\frac{\pi}{3}e^x\right)\right| = \underbrace{\left|\cos\left(\frac{\pi}{3}e^x - n\pi\right)\right|}_{\in\left[\frac{1}{2},1\right]}$ (car $|\cos|$ est π-périodique)

En particulier $\frac{1}{2} \leq |f(x)|$

3) Soit $n \geq 1$. En intégrant sur $[\ln(3n), \ln(3n+1)]$ l'inégalité du 2 on obtient :

$$\int_{\ln(3n)}^{\ln(3n+1)} \frac{1}{2}\,dx \leq \int_{\ln(3n)}^{\ln(3n+1)} |f(x)|\,dx \quad \text{soit: } \frac{b_n}{2} \leq a_n$$

4) Pour chaque $n \geq 1$, $\ln(3n+1) \geq \ln(3n)$ donc $0 \leq b_n$

Au vu de l'inégalité $0 \leq \frac{b_n}{2} \leq a_n$ et de la divergence de $\sum b_n$, la série $\sum a_n$ est elle même divergente à termes positifs.

On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \longrightarrow +\infty \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty$$

Ici $$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \int_{\ln(3k)}^{\ln(3k+1)} |f(x)|\, dx$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{\ln(3k)}^{\ln(3k+3)} |f(x)|\, dx = \int_{\ln 3}^{\ln(3n+3)} |f(x)|\, dx$$

donc, a fortiori, $$\int_{\ln 3}^{\ln(3n+3)} |f(x)|\, dx \longrightarrow +\infty \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty$$

Il est donc exclu que $\int_a^b |f(x)|\, dx$ soit borné pour $a \leq b$ variant dans $[1, +\infty[$: autrement dit, $|f|$ n'est pas intégrable et donc f ne l'est pas non plus.