Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2012-2013

Math III - PMI Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie commune - Devoir n° 4

Correction de l'exercice 1. 1) Soit A un ensemble fini de points dans $\mathbb{R}$. Celui-ci ne peut consister qu'en un ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$ avec $n < \infty$ et $x_j < x_{j+1}$ pour $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Comme un singleton $\{x_j\}$ dans $\mathbb{R}$ est fermé et qu'une union finie de fermés est fermée, l'ensemble A est fermé et $\overline{A} = A$. Comme il n'existe aucun $r > 0$ tel que $\overline{B(x_j, r)} \subset A$, on déduit que $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, et donc $Fr(A) = A$.
2) On considère l'ensemble $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On a

$$\mathbb{N}^C =]-\infty, 0[\bigcup \Big(\cup_{j\in\mathbb{N}}]j, j+1[\Big).$$

Comme toute union d'ouverts est ouverte, et que chacun des ensemble ci-dessus est ouvert, on conclut que $\mathbb{N}^C$ est ouvert, et donc que $\mathbb{N}$ est fermé. Donc $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$, et comme ci-dessus on déduit facilement que $\overset{\circ}{\mathbb{N}} = \emptyset$, et donc $Fr(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.
3) Soit $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 2\}$. Pour tout $p := (x, y, z) \in B$, on remarque que $\overline{B\big(p, \frac{|z-2|}{2}\big)} \subset B$. Ainsi, B est ouvert, et $\overset{\circ}{B} = B$. En considérant les suites $\big((x, y, 2 + 1/n)\big)_n$ contenues dans B, on vérifie que ces suites convergent vers des éléments de $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 2\}$. Comme cet ensemble est fermé, et que c'est le plus petit fermé contenant les limites de ces suites, on a $\overline{B} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 2\}$. On en déduit que $Fr(B) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2\}$.
4) Soit $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 < 1 \text{ et } (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \geq \frac{1}{16}\}$. On remarque que

$$D^C = B\big((\tfrac{1}{2}, 0), \tfrac{1}{4}\big) \bigcup \big[B\big((1, 0), 1\big)\big]^C$$

Comme D^C est l'union d'un ouvert et d'un fermé, il n'est ni ouvert ni fermé. Il en est alors de même pour D qui n'est ni ouvert ni fermé. Pour tout $\theta \in [0, 2\pi)$ on peut considérer les suites $\big((1 + (1 - 1/n)\cos(\theta), (1 - 1/n)\sin(\theta))\big)_{n\geq 4}$ contenues dans D et qui convergent vers $(1 + \cos(\theta), \sin(\theta)) \in \overline{B\big((1, 0), 1\big)}$. On obtient alors que

$$\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } (x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 \geq \tfrac{1}{16}\}.$$

Par ailleurs, on vérifie que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 < 1 \text{ et } (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 > \frac{1}{16}\}$ est un ensemble ouvert dans D, et qu'il est le plus grand ouvert inclu dans D. Il est donc égal a $\overset{\circ}{D}$, et on a alors

$$Fr(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\} \bigcup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 = \tfrac{1}{16}\}.$$

Cet exercice est noté sur 6 points (1,5 points par question). La clarté et la concision des preuves ont été prises en compte.

Correction de l'exercice 2. On considère E un espace vectoriel normé et K une partie compacte de E. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue, et soit $\ell := \inf_{x\in K} f(x)$.
1) Comme f est continue, l'image par f du compact K est un compact de $\mathbb{R}$. En particulier, $f(K)$ est un borné et un fermé de $\mathbb{R}$, et donc $\inf_{x\in K} f(x)$ est bien défini. Ainsi, par définition de l'infimum, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un élément $x \in K$ tel que $0 \leq f(x) - \ell \leq \varepsilon$. En prenant successivement $\varepsilon = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on construit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de K tels que

$$0 \leq f(x_n) - \ell \leq \frac{1}{n}. \tag{1}$$

2) K étant un ensemble compact, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une sous-suite convergente dans K, notée $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour une fonction croissante $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$. La limite de cette sous-suite est notée $x_\infty \in K$. On déduit alors de (1) et de la continuité de f que

$$|\ell - f(x_\infty)| \leq |\ell - f(x_{\varphi(n)})| + |f(x_{\varphi(n)}) - f(x_\infty)| \longrightarrow 0 \quad \text{pour} \quad n \to \infty,$$

d'où l'on conclut que $f(x_\infty) = \ell$.

La conclusion obtenue par ces deux premiers points est qu'une fonction continue prend son minimum sur un compact. Attention, ce résultat n'est pas forcément vrai pour une fonction continue sur un ensemble qui n'est pas compact. Par exemple la fonction $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ ne prend pas sa valeur minimal sur l'ensemble $[1,\infty[$ (qui n'est pas un ensemble compact).
3) On considère maintenant le cas $E = \mathbb{R}$ et on suppose que f vérifie $f(x) \neq x$ pour tout x dans K. On définit alors $g : K \to \mathbb{R}$ par $g(x) = |f(x) - x|$. La fonction ainsi définie est alors continue sur le compact K, et par ce qui a été démontré ci-dessus, il existe $x_\infty \in K$ tel que $\inf_{x\in K} g(x) = g(x_\infty)$. Comme $g(x) \neq x$ pour tout $x \in K$, on a forcément $g(x_\infty) = |f(x_\infty) - x_\infty| \neq 0$, et donc en posant $\varepsilon = g(x_\infty) > 0$, on conclut que

$$g(x) \geq \inf_{y\in K} g(y) = g(x_\infty) = \varepsilon \qquad \text{pour tout } x \in K.$$

Cet exercice est noté sur 4 points.

Correction de l'exercice 3. Éléments propres de C^tC

Soit $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = C\,({}^tC)$. On suppose que $\sum_{i=1}^n a_i^2 := \|C\|^2 \neq 0$

1. Chercher le rang de M.
2. Calculer MC et en déduire que $\|C\|^2$ est une valeur propre de M.
3. Calculer le polynôme caractéristique de M.
4. M est-elle diagonalisable ?

Correction de l'exercice 4. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & X^n P(1/X). \end{array}$$

1. Déterminer $u \circ u$.
2. En déduire que u est diagonalisable.

Correction de l'exercice 5. Pour montrer que l'ensemble $D = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{u_\infty\}$ est un compact de $\mathbb{R}^p$, on va montrer que D est borné et fermé (ce qui est équivalent à compact car $\mathbb{R}^p$ est de dimension finie).
1) Par définition de la convergence de la suite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in B(u_\infty, 1)$ pour tout $n > N$. En posant alors $d = \max_{j\in\{0,\dots,N\}} \|u_\infty - u_j\|$, on a que $\|u_\infty - u_n\| \leq d+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ou de façon équivalente $u_n \in \overline{B(u_\infty, d+1)}$. Ainsi $D \subset \overline{B(u_\infty, d+1)}$, et donc D est borné.
2) Pour montrer que D est fermé, on va montrer que D^C est ouvert. Soit $x \in D^C$. On a alors que $\|x - u_\infty\| > 0$ et $B\big(x, \frac{\|x-u_\infty\|}{2}\big) \cap B\big(u_\infty, \frac{\|x-u_\infty\|}{2}\big) = \emptyset$. Par la définition de la convergence, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in B\big(u_\infty, \frac{\|x-u_\infty\|}{2}\big)$ pour tout $n > N$. En posant alors $\delta = \min_{j\in\{0,\dots,N\}} \|x - u_j\|$ et $r = \min\{\delta, \|x - u_\infty\|\}$, on obtient finalement que $u_n \notin \overline{B(x, \frac{r}{3})}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. En d'autres termes, $D \cap \overline{B(x, \frac{r}{3})} = \emptyset$, c'est-à-dire $\overline{B(x, \frac{r}{3})} \subset D^C$, ce dernier est donc un ensemble ouvert.
Cet exercice est noté sur 4 points.