Correction du Devoir Surveillé 4 - partie commune

Correction de l'exercice 1 Notons γ la courbe définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$. A priori, γ est 2π-périodique, et son étude peut donc se faire sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Cependant, on observe que $\gamma(t+\pi) = -\gamma(t)$, on a donc une symétrie par rapport à l'origine. En étudiant γ sur l'intervalle $[0, \pi]$ puis en effectuant une symétrie par rapport à l'origine, on obtient la courbe γ sur tout l'intervalle $[0, 2\pi]$.
On calcule alors $\gamma'(t) = \big(\cos(t) - \sin(t), 3\sin^2(t)\cos(t)\big)$, et l'on remarque que pour $t \in [0, \pi]$ on a $x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pi/4$, et $y'(t) = 0 \Leftrightarrow t \in \{0, \pi/2, \pi\}$.
On peut alors réaliser un tableau des variations ainsi que tracer une esquisse de la courbe, voir l'annexe.
Finalement, on trouve que pour $t \in [0, \pi]$ on a $x(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3\pi/4$. On calcule alors $y(3\pi/4) = \sqrt{2}/4$, $x'(3\pi/4) = -\sqrt{2}$ et $y'(3\pi/4) = -3\sqrt{2}/4$. Un point d'intersection de γ avec la droite Oy est donc donné par $(0, \sqrt{2}/4)$, et le second point $(0, -\sqrt{2}/4)$ est obtenu par symétrie. La pente de la tangente à γ au point $(0, \sqrt{2}/4)$ est alors donné par $\frac{y'(3\pi/4)}{x'(3\pi/4)} = 3/4$, et la tangente à γ au point $(0, -\sqrt{2}/4)$ a la même pente, à cause de la symétrie centrale.

Correction de l'exercice 2

1. On a clairement $E \subset \mathbb{R}^4$. De plus, $(0,0,0,0)$ appartient à E donc $E \neq \emptyset$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v = (x, y, z, t), w = (x', y', z', t') \in E$. On cherche à savoir si $\lambda v + w = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t')$ appartient à E. Comme $x = y = 0$ et $x' = y' = 0$ puisque v et w appartiennent à E, on a $\lambda x + x' = 0 = \lambda y + y'$. Ainsi, $\lambda v + w$ appartient à E donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

   Soit $v = (x, y, z, t) \in E$. Alors $x = y = 0$ donc $v = (0, 0, z, t) = z(0, 0, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1)$ avec $z, t \in \mathbb{R}$. Par suite, $v \in \mathrm{Vect}((0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$, ce qui implique $E \subset \mathrm{Vect}((0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$. De plus, les vecteurs $(0, 0, 1, 0)$ et $(0, 0, 0, 1)$ sont deux éléments de E et E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, donc $\mathrm{Vect}((0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)) \subset E$. On en déduit que $E = \mathrm{Vect}((0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$. La famille $((0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ est donc une famille génératrice de E. Puisque les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, c'est aussi une famille libre. En conclusion, $((0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ est une base de E.

2. Soit $v = (x, y, z, t) \in F$. Alors $x = z$ et $y = t$ donc $v = (x, y, x, y) = x(1, 0, 1, 0) + y(0, 1, 0, 1)$. Ainsi, $v \in \mathrm{Vect}((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$ et donc $F \subset \mathrm{Vect}((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$. Les vecteurs $(1, 0, 1, 0)$ et $(0, 1, 0, 1)$ appartenant tous deux à l'espace vectoriel F, on en conclut que $F = \mathrm{Vect}((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$. Par conséquent, la famille $((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$ est génératrice de F. Comme cette famille est libre (puisque les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ou en revenant à la définition de la liberté d'une famille), c'est donc une base de G.

   La dimension d'un espace vectoriel est égale au nombre d'éléments d'une de ses bases, donc $\dim F = 2$.

3. (a) On va effectuer des combinaisons linéaires des vecteurs engendrant G afin de simplifier l'expression de

G et d'obtenir une famille libre et génératrice de G. On a

$$\begin{aligned}
G &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\0\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) \underset{C_1\leftarrow C_1-C_3+C_4}{=} \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\0\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)\\
&\underset{C_1\leftarrow 1/3C_1}{=} \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\0\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) \underset{C_2\leftarrow 1/5(C_2-3C_1)}{=} \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)\\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right) \text{ car } \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $((0,1,0,0),(0,0,0,1),(1,0,1,0))$ est une famille génératrice de G. Étudions la liberté de cette famille. Soient $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha(0,1,0,0)+\beta(0,0,0,1)+\gamma(1,0,1,0)=(0,0,0,0)$. Alors on a $(\gamma,\alpha,\gamma,\beta)=(0,0,0,0)$ d'où $\alpha=\beta=\gamma=0$. Par suite, la famille $((0,1,0,0),(0,0,0,1),(1,0,1,0))$ est libre et génératrice de G, c'est donc une base de G. Le sous-espace vectoriel G est donc de dimension 3.

(b) On a vu que $F=\operatorname{Vect}((1,0,1,0),(0,1,0,1))$. Or les vecteurs $(1,0,1,0)$ et $(0,1,0,1)=(0,1,0,0)+(0,0,0,1)$ appartiennent tous deux à G donc $F\subset G$ (car G est stable par combinaisons linéaires). Par suite, $F\cap G=F$ donc une base de $F\cap G$ est $((1,0,1,0),(0,1,0,1))$.

(c) On peut utiliser le fait que $F+G$ est engendré par la concaténation d'une famille génératrice de F et d'une famille génératrice de G, et réduire jusqu'à obtenir une famille libre. On peut aussi utiliser la formule de Grassmann pour obtenir la dimension de $F+G$: $\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)=\dim G$. De plus, tout élément g de G s'écrit $g=0_{\mathbb{R}^4}+g\in F+G$ donc $G\subset F+G$. L'inclusion et l'égalité des dimensions donnent $G=F+G$ donc une base de $F+G$ est $((0,1,0,0),(0,0,0,1),(1,0,1,0))$.

4. On a déjà $\dim E+\dim F=2+2=4=\dim\mathbb{R}^4$. Montrons que $E\cap F=\{0_{\mathbb{R}^4}\}$. Soit $v=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. On a

$$v\in E\cap F \iff \begin{cases} x=y=0\\ x=z\\ y=t\end{cases} \iff v=(0,0,0,0)$$

donc $E\cap F=\{0_{\mathbb{R}^4}\}$. Ainsi, $\mathbb{R}^4=E\oplus F$.

Correction de l'exercice 3 1. L'équation homogène $y''-5y'+6y=0$ a pour solution $y_h(t)=\alpha e^{2t}+\beta e^{3t}$ avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Vu le second membre de l'équation différentielle, on cherche une solution particulière de la forme $y_p(t)=Ae^t+Bte^t$ avec A,B que nous devons déterminer. En calculant $y_p'(t)$ et $y_p''(t)$ et en introduisant ces expressions dans l'équation différentielle avec second membre, on trouve un système d'équation linéaire pour A et B que l'on peut alors résoudre. On obtient $A=3/4$ et $B=1/2$. Donc la solution finale est

$$y(t)=\frac{3}{4}e^t+\frac{1}{2}te^t+\alpha e^{2t}+\beta e^{3t}$$

avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

2. L'équation homogène $y''+y=0$ a pour solution $y_h(t)=\alpha\sin(t)+\beta\cos(t)$ avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

a) Si $\omega\neq\pm1$, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(t)=A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)$ avec A,B que nous devons déterminer. En calculant $y_p'(t)$ et $y_p''(t)$ et en introduisant ces expressions dans l'équation différentielle avec second membre, on trouve un système d'équation linéaire pour A et B que l'on peut alors résoudre. On obtient $A = 0$ et $B = \frac{1}{1-\omega^2}$. Donc la solution finale est

$$y(t) = \frac{1}{1-\omega^2}\sin(\omega t) + \alpha\sin(t) + \beta\cos(t)$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) Si $\omega = \pm 1$, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(t) = At\cos(t) + Bt\sin(t)$ avec A, B que nous devons déterminer. Remarquons qu'une telle solution est équivalente à une solution de la forme $At\cos(\omega t) + Bt\sin(\omega t)$. En calculant $y_p'(t)$ et $y_p''(t)$ et en introduisant ces expressions dans l'équation différentielle avec second membre, on trouve un système d'équation linéaire pour A et B que l'on peut alors résoudre. On obtient $B = 0$ et $A = -\frac{\omega}{2}$. Donc la solution finale est

$$y(t) = -\frac{\omega}{2}t\cos(t) + \alpha\sin(t) + \beta\cos(t)$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4

1. (a) On a $f_1 : x \in \mathbb{R} \longmapsto x+1$ et $f_2 : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2$. Par suite, $f_1 \circ f_1 : x \in \mathbb{R} \longmapsto (x+1)+1 = x+2$ et $f_1 \circ f_2 : x \in \mathbb{R} \longmapsto (x^2)+1 = x^2+1$.

   (b) On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2+1 = x^2+(x+2)-(x+1)$, donc $f_1 \circ f_2 = f_2 + f_1 \circ f_1 - f_1$. Par suite, $f_1 \circ f_2$ est une combinaison linéaire de f_1, f_2 et $f_1 \circ f_1$, ce qui implique que la famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_1 \circ f_1, f_1 \circ f_2)$ est liée.

2. (a) On a $F \subset E$. De plus, la fonction nulle appartient à F (car $\widetilde{0}(0) = 0$) donc F n'est pas vide. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g \in F$. Alors $(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = 0$ donc $\lambda f + g \in F$. Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E.

   La fonction nulle n'appartient pas à G donc G n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

   (b) Soit $g \in G$ fixé. Soit $h \in E$.

   • Analyse : Supposons qu'il existe $f \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $h = f + \alpha g$. Alors $h(0) = f(0) + \alpha g(0) = \alpha g(0)$. Puisque $g(0) \neq 0$, on en déduit que $\alpha = \dfrac{h(0)}{g(0)}$. Alors on peut écrire $f = h - \dfrac{h(0)}{g(0)}g$.

   • Synthèse : Posons $\alpha = \dfrac{h(0)}{g(0)} \in \mathbb{R}$ et $f = h - \alpha g$. Alors on a $f(0) = h(0) - \alpha g(0) = h(0) - h(0) = 0$ donc $f \in F$. De plus, par construction, on a aussi $h = f + \alpha g$. Ainsi, il existe bien $f \in F$ et $\alpha = \dfrac{h(0)}{g(0)} \in \mathbb{R}$ tels que $h = f + \alpha g$.

   (c) On peut remarquer que la solution de la question précédente donne non seulement la décomposition de n'importe quel élément de E sous la forme de la somme d'un élément de F et d'un élément de $\mathbb{R}g$, mais aussi l'unicité de cette décomposition. Par suite $E = F \oplus \mathbb{R}g$.

   Sinon, on déduit de la question précédente que $E = F + \mathbb{R}g$. De plus, on a aussi

$$f \in F \cap \mathbb{R}g \iff \begin{cases} f(0) = 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, f = \lambda g \end{cases} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} \lambda g(0) = 0 \\ f = \lambda g \end{cases} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} \lambda = 0 \\ f = \lambda g \end{cases} \iff f = \widetilde{0}$$

   Ainsi, $F \cap \mathbb{R}g = \{0_E\}$. On obtient donc $E = F \oplus \mathbb{R}g$.

Exercice 1

Tableau des variations

	0		$\pi/4$		$\pi/2$		π
$x'(t)$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	-1
$x(t)$	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1	$\searrow$	-1
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$y'(t)$	0	$+$		$+$	0	$-$	0
$\frac{y'(t)}{x'(t)}$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0

Esquisse de la courbe