Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2016-2017

Cursus prépa- Première année

Fondamentaux des Maths I – Corrigé du DS n° 3

<u>Exercice 1.</u>

1. (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1 + e^x > 0$. Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$. Le tableau des variations de g est donné par :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

   (b) g est strictement croissante, elle est donc injective.

   (c) On a $g(-1) = e^{-1} > 0$ et $g(-2) = -1 + e^{-2} < 0$ (car $e^2 > 1$). La fonction g est continue et 0 est compris entre $g(-2)$ et $g(-1)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule sur l'intervalle $]-2,-1[$. Comme de plus g est injective, g ne s'annule qu'une seule fois sur $\mathbb{R}$, en $\alpha \in]-2,-1[$.

   (d) Comme g est strictement croissante, on a $g(x) < 0$ si $x < \alpha$, $g(\alpha) = 0$ et $g(x) > 0$ si $x > \alpha$.

2. (a) Par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. De plus on a :

$$f(x) = \frac{xe^x}{1+e^x} = \frac{x}{e^{-x}+1} \quad \text{et} \quad f(x) - x = -\frac{xe^{-x}}{e^{-x}+1}.$$

   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0$. La courbe $\mathscr{C}$ admet donc la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote au voisinage de $-\infty$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

   (b) Le signe de $f(x)$ est le signe de x. Donc $\mathscr{C}$ est au dessus de l'asymptote horizontale dans le demi-espace $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$ et $\mathscr{C}$ est en dessous dans le demi-espace $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x < 0\}$. La courbe $\mathscr{C}$ croise l'axe des abscisses lorsque $x = 0$. Étudions le signe de $f(x) - x$. On a pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) - x = -\frac{xe^{-x}}{e^{-x}+1}$. Donc $f(x) - x > 0$ si $x < 0$, $f(x) - x = 0$ si $x = 0$ et $f(x) - x < 0$ si $x > 0$. Donc $\mathscr{C}$ est au dessus de $\mathscr{D}$ dans le demi-espace $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x < 0\}$ et $\mathscr{C}$ est en dessous de $\mathscr{D}$ dans le demi-espace $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$. La courbe $\mathscr{C}$ croise la droite $\mathscr{D}$ au point d'abscisse 0.

   (c) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{(1+e^x)(e^x + xe^x) - (e^x)(xe^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x((1+e^x)(1+x) - xe^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x g(x)}{(1+e^x)^2}.$$

(d) La courbe $\mathscr{C}$ a pour tangente au point d'abscisse 0 la droite d'équation $y = f(0) + f'(0)(x-0)$. On a

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{g(0)}{(1+1)^2} = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}.$$

Donc $\mathscr{C}$ a pour tangente au point d'abscisse 0 la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$.

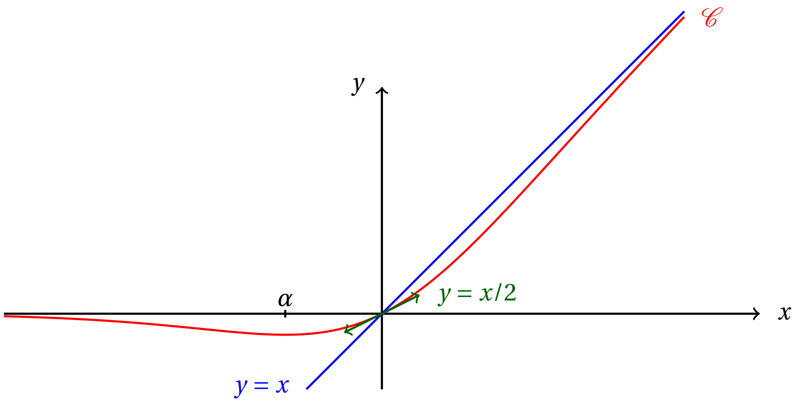
(e) Par définition de α, on a $g(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $\alpha + 1 + e^{\alpha} = 0$. Cette égalité peut s'écrire $1 + e^{\alpha} = -\alpha$ ou encore $-e^{\alpha} = \alpha + 1$. Le calcul de $f(\alpha)$ donne alors :

$$f(\alpha) = \frac{\alpha e^{\alpha}}{1+e^{\alpha}} = \frac{\alpha e^{\alpha}}{-\alpha} = -e^{\alpha} = \alpha + 1.$$

(f) D'après la question (b), f' est du signe de g. Le tableau des variations de f est donc donné par :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$1+\alpha$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Le tracé donne :



Exercice 2.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2-1)e^{-x}$. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ donc l'ensemble A n'a pas de maximum. Montrons que l'ensemble A a un minimum. On étudie les variations de f. On voit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x}(-x^2+2x+1)$. Donc $f'(x)$ a le même signe que la fonction polynômiale $-x^2+2x+1$, qui s'annule en $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$. On a de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On en déduit le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(1-\sqrt{2})$	$\nearrow$	$f(1+\sqrt{2})$	$\searrow$	0

On a $f(1-\sqrt{2}) = 2(1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-1} < 0$. Comme la valeur $2(1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-1}$ est atteinte par la fonction f on a $\min(A) = 2(1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-1}$.

Exercice 3.

1. La fonction argth est définie et continue sur l'intervalle $]-1,1[$ (car la fonction tanh est continue et réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$). La fonction $g : x \mapsto (1-x^2)/(1+x^2)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans l'intervalle $]-1,1]$. De plus, on a $g(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Donc la fonction $f = \operatorname{argth} \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et elle est continue sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.

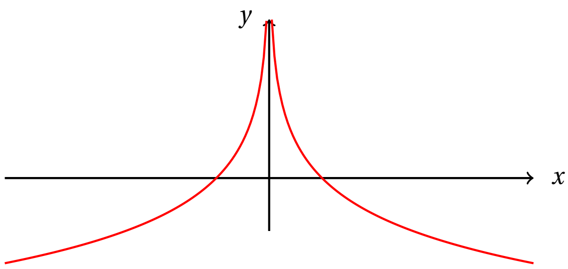
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a g dérivable en x (car $1+x^2 > 0$) et $g(x) \in]-1,1[$. De plus, la fonction argth est dérivable sur $]-1,1[$. Donc, par composition, la fonction f est dérivable en tout point de son domaine de définition, soit sur $\mathbb{R}^*$. On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) &= \operatorname{argth}'\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \\ &= \frac{1}{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2} \cdot \frac{(1+\cancel{x^2})(-2x)-(1-\cancel{x^2})(2x)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{-4x}{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2} = \frac{-4x}{\cancel{1}+2x^2+\cancel{x^4}-(\cancel{1}-2x^2+\cancel{x^4})} = \frac{-4x}{4x^2} = -\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

3. La dérivée f' est positive sur $\mathbb{R}_-^*$ et négative sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{y\to-1} \operatorname{argth}(y) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{y\to 1} \operatorname{argth}(y) = +\infty$. Le tableau des variations de f est donc donné par :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Son graphe est donné ci-dessous :



4. Sur l'intervalle $]0,+\infty[$ on a $f'(x) = -1/x$. Il existe donc une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) = -\ln(x) + c$. Comme $f(1) = \operatorname{argth}(0) = 0$, on a $c = 0$. De même, sur l'intervalle $]-\infty,0[$, on a $f'(x) = -1/x$ donc il existe une constante $d \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in]-\infty,0[$, $f(x) = -\ln(-x) + d$. Et comme $f(-1) = \operatorname{argth}(0) = 0$, on a $d = 0$. ⚠ *Il est impératif de faire le raisonnement* ***séparément*** *sur $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$ car l'assertion*

$$\Big(\forall x \in I, \quad g'(x) = 0\Big) \quad \Longrightarrow \quad \Big(\exists c \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad g(x) = c\Big),$$

appliquée ici à la fonction $g(x) = f(x) + \ln(|x|)$ n'est vraie ***que si*** *I* ***est un intervalle*** *!*

Conclusion : f est donnée par l'expression plus simple suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = -\ln(|x|).$$